

# Краевая задача для определения материальных функций деформационной теории пластичности из опыта на растяжение и кручение сплошного или толстостенного цилиндра.

Агахи К.А. ([Kamilla@imec.msu.ru](mailto:Kamilla@imec.msu.ru)), Кузнецов В.Н.,  
Ковальков В.К., Шестериков С.А.

*Работа выполнена при поддержке гранта  
Российского фонда фундаментальных исследований № 02-01-00075.*

Экспериментальное исследование упруго-пластических свойств материалов обычно проводятся на тонкостенных трубчатых образцах в условиях растяжения, кручения и внутреннего давления, причём малая толщина стенки обеспечивает, в принципе, достаточно точное определение напряжённого состояния из условий статики. В то же время при кручении тонкостенной трубки уже при малых деформациях проявляется потеря устойчивости (эллиптичность сечения). Использование образцов с достаточно толстыми стенками или сплошных позволяет преодолеть эти трудности, но приводит к задаче об определении напряжений в стенке, в условиях, когда свойства материала сами подлежат определению.

В работе, на примере модели упруго-пластических деформаций, учитывающей нелинейность изменения объёма и дилатансию (изменение объёма при сдвиге), предлагается постановка и метод решения краевой задачи для определения материальных функций. Эта задача аналогична задаче о пропорциональном нагружении цилиндра (сплошного или полого) и отличается тем, что в число неизвестных входят две материальные функции, а граничные условия дополняются заданием на боковой поверхности цилиндра компонент деформации, которые считаются известными из опыта.

В работе [1] были предложены определяющие соотношения деформационного типа для ортотропной упругопластической среды, чувствительной к виду напряжённого состояния, обладающей свойством дилатансии, т.е. появления объёмной деформации в результате сдвиговой деформации, и нелинейным изменением объёма.

Для ортотропной среды введём условие пластичности, восходящее к условию Мизеса, которое записывается в виде  $\xi \geq 1$ , где смешанный инвариант  $\xi$  определён следующим образом:

$$\xi = \frac{2}{3} \left( \lambda_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \bar{\lambda} \beta \theta^2 + \lambda_{ijkl}^o \delta_{kl} \varepsilon_{ij} \right) \quad (1),$$

здесь  $\varepsilon_{ij}$  - тензор деформаций,  $\lambda_{ijkl}$ ,  $\lambda_{ijkl}^o$  - материальные тензоры,  $\beta$  - константа материала. Первое и третье слагаемые представляют собой смешанные инварианты тензора деформаций и материальных тензоров, второе – скаляр, где  $\theta = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$ , ( $\theta$  - объёмная деформация),  $\bar{\lambda} = \frac{1}{3} \lambda_{ijkl} \delta_{ij} \delta_{kl}$ .

Простейшей структурой тензоров  $\lambda_{ijkl}$  и  $\lambda_{ijkl}^o$  в главных осях ортотропии, позволяющей описать экспериментальные данные, является следующая. Отличными от нуля принимаем компоненты:  $\lambda_{1111}, \dots, \lambda_{3333}, \lambda_{1212}, \dots, \lambda_{3131}; \lambda_{1111}^o, \dots, \lambda_{3333}^o$ , остальные компоненты равны нулю.

Рассмотрим случай, когда объёмная деформация среды нелинейно зависит от напряжений [2] и введём соответствующий "предел объёмной упругости"  $\theta^*$ ; тогда получаем ещё одно условие появления нелинейных деформаций:  $\theta > \theta^*$ .

Введём в области  $\xi > 0$  обобщённую "интенсивность деформаций":

$$e = \sqrt{\xi} \quad (2).$$

Тогда "условие пластичности" примет вид системы неравенств:

$$\begin{cases} e > 1 \\ \theta > \theta^* \end{cases} \quad (3).$$

Ясно, что неравенства могут рассматриваться как независимые.

Определяющие соотношения примем в виде

$$\sigma_{ij} = [c_{ijkl} - \alpha_{ijkl}\omega(e)]\varepsilon_{ij} - \alpha_{ijkl}^o\delta_{ij}\omega(e) - K\omega_o(\theta) \quad (4),$$

здесь  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжений,  $c_{ijkl}$  - тензор упругих модулей,  $\alpha_{ijkl}, \alpha_{ijkl}^o$  - материальные тензоры,  $K$  - модуль объёмного сжатия  $\omega(e)$  и  $\omega_o(\theta)$  - материальные функции, учитывающие нелинейность.

Отметим некоторые особенности соотношений (4). Слагаемое  $c_{ijkl}\varepsilon_{ij}$  соответствует упругому деформированию; второе слагаемое  $\omega(e)\alpha_{ijkl}\varepsilon_{ij}$  содержит функцию нелинейности  $\omega(e)$ , аналогично теории малых упругопластических деформаций; слагаемое  $K\omega_o(\theta)$  учитывает нелинейное изменение объёма. Член  $\alpha_{ijkl}^o\delta_{ij}\omega(e)$  связан с тем, что в среде сдвиговые напряжения могут вызывать растяжение или сжатие элемента, сравнимое со сдвиговой деформацией.

Структура соотношений (4) позволяет построить их потенциал, который является естественным обобщением потенциала теории малых упругопластических деформаций [3] и имеет вид:

$$W = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \frac{3}{4}\frac{c}{\lambda}\int_1^e e\omega(e)de - \frac{c}{\lambda}\int_{\theta^*}^{\theta}\omega_o(\theta)d\theta.$$

Существование потенциала обеспечивается условиями:

$$\alpha_{1111} = \frac{c}{\lambda}(\lambda_{1111} - \bar{\lambda}\beta), \alpha_{1111}^o = \frac{c}{2\lambda}\lambda_{1111}^o, \alpha_{1212} = -c\beta, \alpha_{3232} = \frac{c}{\lambda}\lambda_4,$$

здесь введён инвариант  $c = \frac{1}{5}c_{ijkl}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$ , имеющий смысл удвоенного среднего модуля сдвига (в изотропной среде  $c = 2\mu$ ).

Для определения материальных функций  $\omega(e), \omega_o(\theta)$  можно использовать опыт на кручение цилиндрического образца, по методике, изложенной ниже.

Предварительно рассмотрим задачу об упругопластическом кручении однородного, трансверсально - изотропного толстостенного кругового цилиндра

(задача А). На торцах цилиндра действует система сил, приводящихся к крутящему моменту  $M$  и продольной силе  $P$ , а на внутренней поверхности действует давление  $Q$ , массовые силы и начальные напряжения отсутствуют. Внешняя боковая поверхность свободна от напряжений. Выберем цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$ , в которой ось  $Z$  совпадает с осью цилиндра, являющейся его осью анизотропии, и плоскость  $z=0$  – его плоскость симметрии.

Цилиндр предполагается «длинным» и, следовательно, деформации и напряжения зависят только от одной координаты  $r$ , а перемещения имеют вид:

$$u = u(r), v = Trz + \zeta(r), w = Rz + \eta(r) \quad (5),$$

где  $u(r)$ ,  $\zeta(r)$ ,  $\eta(r)$  – неизвестные функции радиуса, а  $T$  и  $R$  – некоторые константы.

Определяющие соотношения, связывающие напряжения с малыми деформациями, для трансверсально – изотропного материала в случае упругой симметрии в главных осях анизотропии  $r, \theta, z$  примем в виде (4), используя вариант с двумя экспериментально определяемыми функциями нелинейности материала  $\omega(e)$ ,  $\omega_o(\theta)$ , т.е.:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_{1j} \varepsilon_j - \omega(e)(\alpha_{1j} \varepsilon_j - \alpha_1^0) - K \omega_o(\theta) \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_4 &= c_{44} \varepsilon_4 - \omega(e) \alpha_{44} \varepsilon_4 - K \omega_o(\theta) \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_6 &= (c_{11} - c_{12}) \varepsilon_6 - \omega(e)(\alpha_{11} - \alpha_{12}) \varepsilon_6 - K \omega_o(\theta) \end{aligned} \quad (6),$$

где индексы у компонентов тензоров напряжений и деформаций в матричных обозначениях имеют соответствие:

1 –  $rr$ , 2 –  $\theta\theta$ , 3 –  $zz$ , 4 –  $z\theta$ , 5 –  $rz$ , 6 –  $r\theta$ ;

Граничные условия на боковой поверхности имеют вид:

$$\sigma_{rr} = -Q, \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0 \text{ при } r = r_1, \sigma_{rz} = \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \text{ при } r = r_2 \quad (7),$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – внутренний и внешний радиусы цилиндра соответственно. На торцах выполняются интегральные граничные условия

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{zz} r dr = P, \quad 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{z\theta} r^2 dr = M \quad (8).$$

Выражая с помощью формул Коши деформации через перемещения, запишем уравнения равновесия в перемещениях, подставляя вместо напряжений их выражения через деформации из определяющих соотношений (6), с учетом формул (5) получим три уравнения для трёх неизвестных функций  $u(r)$ ,  $\zeta(r)$ ,  $\eta(r)$ . Перенос в них нелинейные члены вправо, имеем:

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) - \frac{u(r)}{r^2} &= F \\ \zeta''(r) + \frac{1}{r} \zeta'(r) - \frac{\zeta(r)}{r^2} &= G \\ \eta''(r) + \frac{\eta'(r)}{r} &= H \end{aligned} \quad (9),$$

где  $F, G, H$  имеют следующий вид:

$$F = \omega(e) \left( u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) - \frac{u(r)}{r^2} \right) + \omega'(e) \frac{1}{c_{11}} (\alpha_{11} u'(r) + \alpha_{12} u(r) + \alpha_{13} R + c_{11} \alpha_1^0) + K \omega'_o$$

$$G = \omega(e) \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{c_{11} - c_{12}} \left( \zeta''(r) + \frac{1}{r} \zeta'(r) - \frac{\zeta(r)}{r^2} \right) + \omega'(e) \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{c_{11} - c_{12}} \left( \zeta'(r) - \frac{\zeta(r)}{r} \right)$$

$$H = \omega(e) \frac{\alpha_{44}}{c_{44}} (\eta''(r) + \eta'(r)) + \omega'(e) \frac{\alpha_{44}}{c_{44}} \eta'(r)$$

При обработке опытных данных возникает в тех же условиях задача, где дополнительными неизвестными являются материальные функции  $\omega$  и  $\omega_o$ .

Рассмотрим теперь постановку и решение **задачи В** об определении функций  $\omega, \omega_o$  (в частности, о восстановлении точной зависимости между касательным напряжением  $\tau$  и деформацией сдвига  $\gamma$ ) из опыта на кручение толстостенного или сплошного цилиндрического образца. Эта нестандартная задача ставится следующим образом: в задаче об упругопластическом кручении с растяжением и давлением цилиндра, изложенной выше, в число неизвестных включаются функции  $\omega(e), \omega_o(\theta)$ ; в то же время на свободной боковой поверхности цилиндра кроме нулевых напряжений, задаётся ещё и величина деформаций. Задача решается для ряда последовательно возрастающих значений момента.

Таким образом имеем следующую постановку задачи:

- 1) уравнения равновесия в перемещениях (9);
- 2) граничные условия на боковой поверхности (7) и на торцах (8);
- 3) деформация сдвига на внешней боковой поверхности.

Для решения этой задачи предлагается метод последовательных приближений, который продемонстрируем сначала на примере с простейшим вариантом определяющих соотношений – с одной функцией нелинейности  $\omega$ ; тогда уравнения (6) примут вид.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_{1j} \varepsilon_j - \omega(e) (\alpha_{1j} \varepsilon_j - \alpha_1^0) \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_4 &= c_{44} \varepsilon_4 - \omega(e) \alpha_{44} \varepsilon_4 \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_6 &= (c_{11} - c_{12}) \varepsilon_6 - \omega(e) (\alpha_{11} - \alpha_{12}) \varepsilon_6 \end{aligned} \tag{10}$$

Метод состоит в следующем:

1. Обозначим касательное напряжение в нормальном сечении  $\sigma_{z\theta} \equiv \sigma_4$  через  $\tau(r)$ ,  $\sigma_4 \equiv \tau(r)$ . В начальном приближении неизвестную функцию  $\tau^0(r)$  приближённо находим из опыта на кручение толстостенного цилиндра в предположении, что в сечении касательные напряжения распределены равномерно, тогда

$$\tau^o \approx \frac{2M}{\pi(r_2^2 - r_1^2)(r_1 + r_2)}.$$

2. Находим из соотношений (10) функцию  $\omega^0$  нулевого приближения по формуле:

$$\omega_0 = \omega_4 = \frac{c_4 \varepsilon_4 - \tau_0}{\alpha_{44} \varepsilon_4} \quad (11),$$

где аргумент функции  $\omega(e)$  выражается согласно (2) следующим образом:

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\lambda_4} \gamma, \quad \gamma = 2\varepsilon_4 \quad (12).$$

3. Решается **задача А** - стандартная краевая задача о кручении, рассмотренная выше, с известной функцией пластичности  $\omega = \omega^0$  и обычными граничными условиями на свободной поверхности, (т.е. при этом исключается условие, задающее на поверхности деформацию сдвига).

4. На основе решения для ряда возрастающих значений  $M$  **задачи А**, которое считается известным и будет построено ниже, вычисляется в нулевом приближении зависимость крутящего момента от деформации сдвига на

поверхности, которая имеет вид:  $M^0 = \pi \gamma \left[ \frac{c_{44}(r_2^4 - r_1^4)}{4r_2} - \frac{\alpha_{44}}{r_2} \int_{r_1}^{r_2} r^3 \omega^0(e) dr \right]$ .

5. Сравнение экспериментальной зависимости "крутящий момент  $M$  – сдвиг  $\gamma$ ", т.е.  $M^3 = M^3(\gamma)$  и вычисленной аналогичной кривой  $M^0 = M^0(\gamma)$  – показывает погрешность, внесённую предположением о равномерности распределения напряжений по сечению. Разность функций  $M^3$  и  $M^0$ , умноженная на нормирующий коэффициент  $k = \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)(r_2 + r_1)}$ , даёт поправку для

вычисления зависимости  $\tau^1 = \tau^1(\gamma)$  в первом приближении, т.е. строится зависимость «касательное напряжение – сдвиг» первого приближения по формуле

$$\tau^1 = \tau^0 + k(M^3 - M^0).$$

6. Указанным в пункте 2 способом, с помощью формул (10), (11), по кривой  $\tau^1 = \tau^1(\gamma)$  находится функция  $\omega^1$  первого приближения. После этого строится первое приближение решения **задачи А** и т.д.

Таким образом, для  $(n+1)$  – го приближения получим

$$\tau^{n+1} = \tau^n + k(M^3 - M^n).$$

Сравниваем полученную зависимость  $\tau^{n+1}(\gamma)$  с зависимостью предыдущего приближения  $\tau^n$ , и если они совпадают с заданной точностью, то итерационный процесс завершается. Функция пластичности  $\omega^{n+1}$ , для которой вычисленная и экспериментальная зависимости «крутящий момент – сдвиг», в известном смысле, совпадают, может быть принята в качестве искомой истинной материальной функции. Другими словами, зависимость  $\tau$ – $\gamma$  в  $(n+1)$ -м приближении представляет собой истинную зависимость, которая, в принципе, могла бы быть получена непосредственно из опыта на кручение весьма тонкостенного образца.

Заметим, что в случае, когда экспериментальная кривая  $M^3 = M^3(\gamma)$  является монотонной и выпуклой, как показывает опыт практических вычислений, удаётся получить на 4-ой – 5-ой итерации совпадение расчетной кривой и экспериментальной с точностью, которую обеспечивает эксперимент.

Предложенный метод определения истинной зависимости  $\tau$ - $\gamma$  легко обобщается для основной модели (7) с двумя функциями нелинейности  $\omega$  и  $\omega_0$ . При этом несколько изменяются шаги 2 и 3 описанной процедуры.

В 2. ищутся функции  $\omega$  и  $\omega_0$ , материальные тензоры  $\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_i^0$  нулевого приближения, а затем первого и  $n$ -го по методике, описанной в пп. 5 и 6.

В 3. решается такая же **задача А**, но уже для основной модели (7).

В заключение приведём решение **задачи А** методом упругих решений, когда в каждом приближении получается точное аналитическое решение.

Систему нелинейных уравнений (19) будем решать методом последовательных приближений. Для этого введем итерационную схему:

$$\begin{aligned} u''_{k+1}(r) + \frac{1}{r} u'_{k+1}(r) - \frac{u_{k+1}(r)}{r^2} &= F_k \\ \varsigma''_{k+1}(r) + \frac{1}{r} \varsigma'_{k+1}(r) - \frac{\varsigma_{k+1}(r)}{r^2} &= G_k \\ \eta''_{k+1}(r) + \frac{\eta'_{k+1}(r)}{r} &= H_k \end{aligned} \quad (13),$$

где  $F_k = F(u_k, e_k)$ ,  $G_k = G(\varsigma_k, e_k)$ ,  $H_k = H(\eta_k, e_k)$ .

Эти обыкновенные дифференциальные уравнения Эйлера, как известно [4,5], имеют точное решение при любой правой части, а именно:

$$\begin{aligned} u_{k+1}(r) &= A_1^k r + A_2^k \frac{1}{r} + f_k(r) \\ \varsigma_{k+1}(r) &= B_1^k r + B_2^k \frac{1}{r} \varphi_k(r) \\ \eta_{k+1}(r) &= C_1^k + C_2^k \ln(r) + g_k(r) \end{aligned} \quad (14).$$

где  $f_k(r)$ ,  $\varphi_k(r)$ ,  $g_k(r)$  вычисляются по формулам:

$$f_k(r) = \frac{1}{2} \int_{r_1}^r \left( r - \frac{\rho^2}{r} \right) F_k(\rho, e_k) d\rho, \quad \varphi_k(r) = \frac{1}{2} \int_{r_1}^r \left( r - \frac{\rho^2}{r} \right) G_k(\rho, e_k) d\rho, \quad g_k(r) = \int_{r_1}^r \rho \ln \left( \frac{r}{\rho} \right) H_k(\rho, e_k) d\rho.$$

Константы  $A_i^k$ ,  $B_i^k$ ,  $C_i^k$  ( $i=1,2$ ),  $T^k$ ,  $R^k$  определяются из граничных условий (7), (8), которые с учетом определяющих соотношений (6), формул для перемещений и полученных выражений для  $u, \varsigma, \eta$  примут вид:

$$\begin{aligned} C_1^{k+1} c_{13} + A_1^{k+1} (c_{11} + c_{12}) + A_2^{k+1} (c_{12} - c_{11}) \frac{1}{r_1^2} &= L_1^k(r_1) + Q, \quad C_1^{k+1} c_{13} + A_1^{k+1} (c_{11} + c_{12}) + A_2^{k+1} (c_{12} - c_{11}) \frac{1}{r_2^2} = L_1^k(r_2) \\ -B_2^{k+1} \frac{1}{r_1^2} &= L_2^k(r_1), \quad -B_2^{k+1} \frac{1}{r_2^2} = L_2^k(r_2), \quad C_2^{k+1} \frac{1}{r_1^2} = L_3^k(r_1), \quad C_2^{k+1} \frac{1}{r_2^2} = L_3^k(r_2), \quad 2A_1^{k+1} c_{13} + R^{k+1} c_{33} = L_4^k, \\ T^k &= \frac{1}{\pi} \frac{M}{\frac{c_{44}(r_2^4 - r_1^4)}{4} - \alpha_{44} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \omega(e^k) dr}, \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
L_1^k(r) &= \omega(e_k) \left( \alpha_{13} R^k + A_1^k (\alpha_{11} + \alpha_{12}) + (\alpha_{12} - \alpha_{11}) A_2^k \frac{1}{r^2} \right) - c_{11} f_k'(r) - c_{12} \frac{f_k(r)}{r} + K \omega_o(\theta_k), \\
L_2^k(r) &= \omega(e_k) \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{c_{11} - c_{12}} \left( -B_2^k \frac{2}{r^2} + \varphi_k(r) - \frac{\varphi_k(r)}{r} \right), \quad L_3^k(r) = \omega(e_k) \frac{\alpha_{44}}{c_{44}} \left( C_2^k \frac{1}{r} + g_k'(r) \right) - f_k'(r), \\
L_4^k(r) &= \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} r \left( \omega(e_k) \left( 2\alpha_{13} A_1^k + \alpha_{13} \left( f_k'(r) + \frac{f_{k-1}(r)}{r} \right) + \alpha_{33} R^k \right) + \alpha_3^0 \omega(e_k) + K \omega_o(\theta_k) - c_{13} \left( f_k'(r) + \frac{f_k(r)}{r} \right) \right) dr
\end{aligned}$$

На первой итерации принимаем  $\omega(e)=0$ ,  $\omega_o(\theta)=0$ , т.е. имеем упругую задачу. Можно показать, что в этом случае на каждой итерации  $\varsigma_k = \eta_k \equiv 0$ .

Таким образом, на  $k$ -ой итерации задача об упругопластическом пропорциональном нагружении приводится к краевой задаче, решение которой в деформациях выписывается явно в следующем виде:

$$\varepsilon_{rr}^k = A_1^k - A_2^k \frac{1}{r^2} + f_k'(r), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^k = A_1^k - A_2^k \frac{1}{r^2} + \frac{f_k(r)}{r}, \quad \varepsilon_{zz}^k = R^k, \quad \varepsilon_{r\theta}^k = 0, \quad \varepsilon_{rz}^k = 0, \quad \varepsilon_{\theta z}^k = \frac{1}{2} T^k r,$$

где константы  $A_1^k, A_2^k, T^k, R^k$  находятся из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
c_{13} R^k + (c_{11} + c_{12}) A_1^k + \frac{c_{12} - c_{11}}{r_1^2} A_2^k &= L_1^{k-1}(r_1) \\
c_{13} R^k + (c_{11} + c_{12}) A_1^k + \frac{c_{12} - c_{11}}{r_2^2} A_2^k &= L_1^{k-1}(r_2) \\
2c_{13} A_1^k + c_{33} R^k &= L_4^{k-1} \\
T^k &= \frac{1}{\pi} \frac{M}{\frac{c_{44}(r_2^4 - r_1^4)}{4} - \alpha_{44} \int_{r_1}^{r_2} r^3 \omega(e^k) dr}
\end{aligned}$$

Обобщенная интенсивность деформаций  $e$  (2) в этих уравнениях определяется выражением

$$\begin{aligned}
e_k^2 &= \frac{2}{3} \left( \lambda_1 \left( \left( A_1^k - \frac{A_2^k}{r^2} + f_k'(r) \right)^2 + \left( A_1^k - \frac{A_2^k}{r^2} + \frac{f_k(r)}{r} \right)^2 \right) + \lambda_3 (R^k)^2 - \lambda \beta \left( 2A_1^k + f_k' + \frac{f_k}{r} + R^k \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2\lambda_1^0 \left( 2A_1^k + f_k' + \frac{f_k}{r} \right) + \lambda_1^0 R^k + \frac{1}{2} \lambda_4 r^2 (T^k)^2 \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, поставленная **задача А** допускает в каждом приближении аналитическое решение (14), которое и используется в пунктах 4, 6 при решении **задачи В**.

Частный случай изотропного материала получим, полагая:

$$\begin{aligned}
c_{ijkl}(\lambda, \mu) &=: c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} = \lambda + 2\mu, \quad c_{1122} = \dots = c_{3311} = \lambda, \quad c_{1212} = \dots = c_{3131} = \mu \\
\alpha_{1111} &= \alpha_{2222} = \alpha_{3333} = 2\mu(1 - \beta), \quad \alpha_{1122} = \dots = \alpha_{3311} = 2\mu\beta, \quad \alpha_{1111}^o = \dots = \alpha_{3333}^o = 2\mu \\
\lambda_{1111} &= \dots = \lambda_{3333} = \frac{1}{e_s^2}, \quad \lambda_{1212} = \dots = \lambda_{3131} = \frac{2}{\sqrt{3}e_s^2}, \quad \lambda_{1111}^o = \dots = \lambda_{3333}^o,
\end{aligned}$$

здесь  $\lambda, \mu$  - параметры Ламе,  $e_s$  - предел текучести по деформациям.

Тогда определяющие соотношения (2) принимают вид:

$$\sigma_1 = 2\mu \left[ 1 - \omega(e) \right] e_1 + K \left[ \theta - \frac{1}{3} \omega_o(\theta) \right] - \alpha^o \omega(e)$$

$$\sigma_4 = 2\mu \left[ 1 - \omega(e) \right] e_4$$

Правые части уравнений равновесия (9) записываются в виде:

$$F = \omega(e) \left( u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) - \frac{u(r)}{r^2} \right) + \omega'(e) \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{4}{3} \mu u'(r) - \frac{2}{3} \mu u(r) - \frac{2}{3} \mu R + (\lambda + 2\mu) \alpha_1^0 \right) + \frac{1}{3} K \omega_o'(\theta)$$

$$G = \omega(e) \left( \varsigma''(r) + \frac{1}{r} \varsigma'(r) - \frac{\varsigma(r)}{r^2} \right) + \omega'(e) \left( \varsigma'(r) - \frac{\varsigma(r)}{r} \right), \quad H = \omega(e) (\eta''(r) + \eta'(r)) + \omega'(e) \eta'(r).$$

Уравнения для определения констант  $A_i^k, B_i^k, C_i^k$  ( $i=1,2$ ),  $T^k, R^k$  примут вид:

$$\lambda C_1^{k+1} + 2(\lambda + \mu) A_1^{k+1} + 2\mu A_2^{k+1} \frac{1}{r_1^2} = L_1^k(r_1) + Q, \quad \lambda C_1^{k+1} + 2(\lambda + \mu) A_1^{k+1} + 2\mu A_2^{k+1} \frac{1}{r_2^2} = L_1^k(r_2)$$

$$-B_2^{k+1} \frac{1}{r_1^2} = L_2^k(r_1), \quad -B_2^{k+1} \frac{1}{r_2^2} = L_2^k(r_2), \quad C_2^{k+1} \frac{1}{r_1^2} = L_3^k(r_1), \quad C_2^{k+1} \frac{1}{r_2^2} = L_3^k(r_2), \quad 2\lambda A_1^{k+1} + (\lambda + \mu) R^{k+1} = L_4^k$$

$$T^k = \frac{1}{\pi} \frac{M}{\frac{\mu(r_2^4 - r_1^4)}{2} - 2\mu \int_{r_1}^{r_2} r^3 \omega(e^k) dr},$$

где обозначено:

$$L_1^k(r) = \frac{2}{3} \mu \omega(e_k) \left( -R^k + A_1^k - 3A_2^k \frac{1}{r^2} \right) + \eta_1 \omega_o(\theta_k) - (\lambda + 2\mu) f_k'(r) - \lambda \frac{f_k(r)}{r} + K \omega_o(\theta_k)$$

$$L_2^k(r) = \omega(e_k) \left( -B_2^k \frac{2}{r^2} + \varphi_k(r) - \frac{\varphi_k(r)}{r} \right), \quad L_3^k(r) = \omega(e_k) \left( C_2^k \frac{1}{r} + g_k'(r) \right) - f_k'(r)$$

$$L_4^k(r) = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} r \left( \omega(e_k) \left( -\frac{4}{3} \mu A_1^k - \frac{2}{3} \mu \left( f_k'(r) + \frac{f_{k-1}(r)}{r} \right) + \frac{4}{3} \mu R^k \right) + \alpha^o \omega(e_k) + K \omega_o(\theta_k) - \lambda \left( f_k'(r) + \frac{f_k(r)}{r} \right) \right) dr$$

Обобщенная интенсивность деформаций  $e$  определяется выражением

$$e_k^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{e_s^2} \left( \left( A_1^k - \frac{A_2^k}{r^2} + f_k' \right)^2 + \left( A_1^k - \frac{A_2^k}{r^2} + \frac{f_k}{r} \right)^2 \right) + \frac{1}{e_s^2} (R^k)^2 - \frac{1}{3} \lambda \left( 2A_1^k + f_k' + \frac{f_k}{r} + R^k \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\lambda^0 \left( 2A_1^k + f_k' + \frac{f_k}{r} \right) + \lambda^0 R^k + \frac{1}{2e_s^2} r^2 (T^k)^2 \right).$$

Полученные результаты проиллюстрируем численным экспериментом, который был проведён по следующей схеме:

1. Считаем, что материал характеризуется одной материальной функцией

$$\omega = \omega(e) \quad (15),$$

которая считается известной (заданной).



2. Решаем **задачу А**, т.е. стандартную задачу о кручении цилиндра, свойства материала которого описываются функцией  $\omega = \omega(e)$  для ряда последовательных возрастающих значений момента  $M$ , что даёт возможность построить зависимость

$$\gamma = \gamma(M) \quad (16),$$

аналогичную той, что получается экспериментально.

3. Считаем зависимость (16) заданной, а зависимость (15) искомой; для нахождения (15) ставится и решается **задача В**; результат решения – вычисленная зависимость  $\omega = \omega(e)$  сравнивается с исходной зависимостью (16).

4. Расчёты были проведены для модели изотропного материала с линейным упрочнением (17) [3].

$$\tau(\gamma) = \begin{cases} G\gamma, & \gamma < \gamma_s \\ G\gamma_s + G'(\gamma - \gamma_s), & \gamma > \gamma_s \end{cases}$$

$$\omega(e) = \begin{cases} 0, & \gamma < \gamma_s \\ \frac{(G - G')(\gamma - \gamma_s)}{G\gamma}, & \gamma > \gamma_s \end{cases} \quad (17).$$

На рис. 1, 2 представлены результаты расчётов, которые дают представление о величине расхождения кривых, изображающих зависимость  $M \sim \gamma$ , точную, построенную по решению **задачи В** (нижние кривые), и приближённую, построенную в предположении равномерного распределения напряжений по сечению (верхние кривые). Рассмотрены случаи, когда отношение модуля упрочнения  $G'$  к модулю сдвига  $G$  составляет 0,5; 0,1; 0,01 для сплошного цилиндра (рис. 1) и для отношения радиусов, равного 1/3 (рис. 2).

Отметим, что для слабого упрочнения влияние толщины стенки можно считать малым.

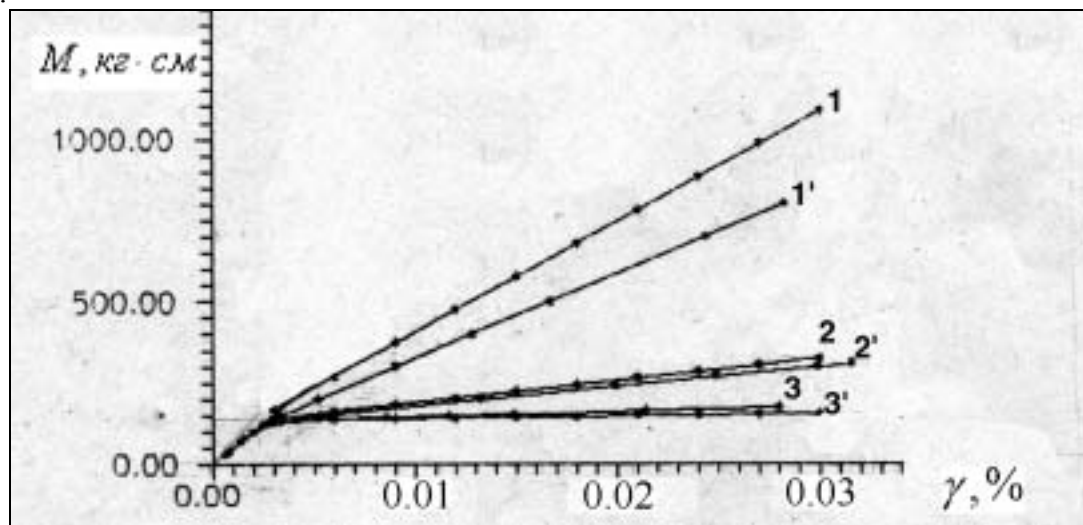


Рис. 1

Сравнение точной и приближённой зависимостей  $M - \gamma$ , найденных в численном эксперименте. Внутренний радиус  $r_1 = 0$ , внешний радиус  $r_2 = 1,7$  см. кривые 1, 2, 3 – в предположении равномерного распределения

касательных напряжений по толщине; 1', 2', 3' – точное решение, соответственно для  $G' = G/2; G/10, G/100$ .

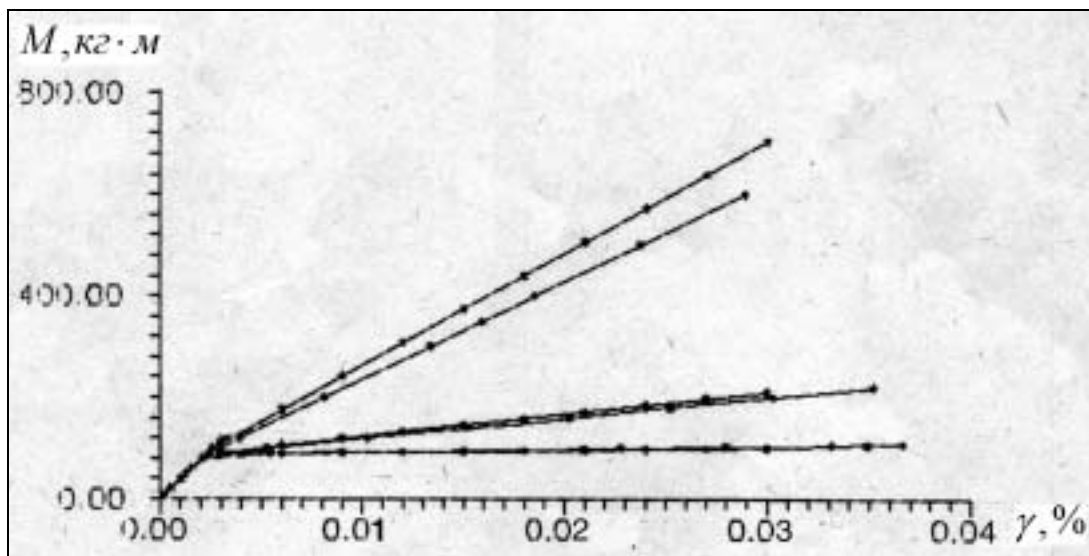


Рис. 2

Сравнение точной и приближённой зависимостей  $M-\gamma$ , найденных в численном эксперименте. Внутренний радиус  $r_1 = 1,2$ , внешний радиус  $r_2 = 1,7$  см. Кривые 1, 2, 3 – в предположении равномерного распределения касательных напряжений по толщине; 1', 2', 3' – точное решение, соответственно для  $G' = G/2; G/10, G/100$ .

#### Список литературы

1. Кузнецов В.Н., Агахи К.А. Построение материальных функций и численный метод решения краевых задач пластичности с учётом влияния гидростатического давления. Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1976, № 5, с. 130 – 135.
2. Агахи К.А., Кузнецов В.Н., Шестериков С.А. Об учёте нелинейности объёмной деформации в деформационной теории пластичности. Электронный журнал "Исследовано в России", <http://zhurnal.ape.ru/articles/2003/014.pdf>, с. 142 – 152.
3. Ильюшин А.А. Пластичность (основы общей математической теории). Наука, М., 1963, 316 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, М., 1964, стр. 211.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1968, стр. 100, 137, 449.