

## **О возможном виде тензора вязких напряжений в механике сыпучих тел**

**Ротенберг А.В. (technoproekt@technologic.ru )**

Научно-производственное предприятие "ТЕХНОПРОЕКТ", г. Пенза

Благодаря ряду уникальных свойств сыпучие тела находят широкое применение в производстве композиционных материалов, в порошковой металлургии, в задачах строительной механики и механики грунтов, а также в ряде других отраслей промышленности [1, ..., 4].

Сыпучее тело (СТ) представляет собой подвижный связный агрегат макрочастиц сплошного материала, находящихся между собой в механическом контакте в газовой или жидкой среде в поле объемных удерживающих сил (например, песок, грунты, гранулы полимеров, порошки металлов и т.д.).

Анализ показывает, что существующие механические модели, привлекаемые для расчетов процессов, происходящих в СТ в ряде практически важных задач не дают адекватного описания механического поведения сыпучего тела. Например, известные реологические модели не «содержат» зависимости псевдоагрегатного состояния СТ от вида и параметров внешних механических воздействий [6].

Кроме того, модельные представления СТ, пригодные в инженерных расчетах, являются почти всегда или чисто феноменологическими или искусственными, что обуславливает их заведомо ограниченную применимость [4].

Настоящая работа представляет собой попытку последовательного построения механической модели СТ, учитывающей вышеуказанную специфику этого класса материалов. Такая модель получается нелинейной и содержит ряд базовых материальных констант, что является платой за ее относительно более высокую общность.

Специфическими особенностями класса задач механики СТ в технологиях приборостроения являются :

1. Зависимость характера динамического состояния СТ от параметров внешних механических воздействий в рамках одной задачи.
2. Неприменимость условия равенства нулю объемных деформаций в СТ.
3. В ряде задач - замкнутость объемов, заполненных СТ.

Существующие модели СТ могут быть разделены на несколько классов : точечные, статистические, эффективные сплошные и специальные модели [4, ..., 7].

Модель СТ является заданной, а задача – динамически определимой, если построена замкнутая система уравнений движения СТ.

В данной работе модель СТ строится как модель эффективной сплошной среды с соответствующим образом определенными входящими в систему уравнений динамическими величинами и константами. Представление СТ как эффективной сплошной среды дает наиболее детальное описание ее механического поведения во всем диапазоне внешних нагрузок и граничных условий.

Возможность представления СТ как эффективной сплошной среды была обоснована статмеханическим рассмотрением, в рамках которого получены ограничения и условия применимости сплошной модели СТ [5].

Система уравнений сплошной среды включает : уравнение сохранения импульса (уравнение движения), уравнение непрерывности, уравнение энергетического баланса, реологическое уравнение. При этом формально вид первых трех уравнений одинаков для любой сплошной среды. Основным уравнением, определяющим особенности конкретного класса сред, является реологическое уравнение, связывающее в общем случае компоненты тензора напряжений как между собой, так и с компонентами тензора деформаций и тензора скоростей деформаций. Тем самым, реологические уравнения порождают соответствующие модели СТ.

Многочисленные опыты с различными сыпучими материалами показали, что модели СТ, существующие в классе эффективных сплошных моделей (как однокомпонентные, так и комбинированные) не дают хорошего совпадения с действительным поведением этих материалов [6]. Это является следствием двух обстоятельств : зависимости характера динамического состояния СТ (или иначе - ее псевдоагрегатного состояния) от параметров внешнего механического воздействия и (в ряде задач) отличия от нуля объемных деформаций в СТ – условие, используемое в известных эффективных сплошных моделях [7].

В данной работе реологическое уравнение СТ для указанного круга задач строится как соотношение между компонентами тензора сопротивления среды и компонентами тензора скоростей деформаций на основе двух экспериментальных фактов, относящихся к движению материальной точки на шероховатой плоскости.

1. При выведении первоначально покоящейся точки из состояния покоя в момент начала движения на нее действует сила трения покоя  $F_q$ , которую представим в следующем виде :

$$F_q = -q\delta'(v)\frac{v}{|v|}, \quad (1)$$

где  $q$  – константа, характеризующая предельное усилие сцепления точки с поверхностью. Она зависит от материала и состояния поверхностей точки и плоскости,

$v$  – скорость точки,

$\delta'(v)$  – производная  $\delta$ -функции по скорости.

2. При движении точки по плоскости на нее действует сила трения скольжения  $F_S$ , описываемая кулоновским законом сухого трения :

$$F_S = -fp\frac{v}{|v|}, \quad (2)$$

где  $f$  – коэффициент трения,

$p$  – сила прижатия точки к плоскости.

Для построения тензора сопротивления СТ выражения (1), (2) обобщим, соответственно, модифицируя следующим образом :

$$F_q = -q\frac{2\alpha}{\pi}\frac{v}{(\alpha^2 + v^2)^2} \quad (3)$$

$$F_S = -fp\frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}} \quad (4)$$

Выражение (3) получено на основе аппроксимации  $\delta$ -функции [8]:

$$\delta(v) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + v^2)}, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (5)$$

с последующим дифференцированием (5) по  $v$  и выражает следующий характер действия силы трения покоя : когда точка покоится ( $v=0$ ), сила  $F_q=0$  в момент начала движения (страгивания), сила  $F_q$  резко возрастает до некоторого максимального значения и затем, с ростом скорости, резко спадает практически до нуля. Такая зависимость  $F_q(v)$  («размытость» по  $v$ , характеризуемая параметром  $\alpha$ ) есть следствие учета эффекта дискретности сыпучей среды и будет проанализирована ниже.

Выражение (4) представляет собой закон преобразованного сухого трения и введен В.В.Андроновым [9]. Величина  $u^2$  в (4) есть квадрат суммарной скорости точки по всем игнорируемым степеням свободы [4].

Искомый тензор сопротивления  $\sigma_{ij}$  строим на основе следующих требований.

1) Тензор  $\sigma_{ij}$  должен являться обобщением выражений (3), (4). Это означает, что при переходе от эффективной сплошной среды к материальной точке величина  $\sigma_{ij}$  должна превращаться в сумму  $F_q$  и  $F_S$ .

2) Процессы внутреннего трения в среде возникают только тогда, когда соприкасающиеся участки среды движутся с различной скоростью, т.е. когда существует относительное движение частей среды. Поэтому тензор  $\sigma_{ij}$  должен зависеть не от самих скоростей, а от их производных по координатам и обращаться в нуль, когда среда движется как целое.

3) Тензор  $\sigma_{ij}$  должен обращаться в нуль также и в том случае, когда вся среда как целое совершает равномерное вращение. Это означает, что  $\sigma_{ij}$  должен быть симметричен.

На основе соотношений (3), (4) с учетом изложенных требований запишем выражение для  $\sigma_{ij}$  в виде :

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{f_\tau (P + G)}{2S} + \frac{\alpha q_\tau}{\pi(\alpha^2 + S^2)^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{f_n (P + G)}{3S} + \frac{2 \alpha q_n}{3\pi(\alpha^2 + S^2)^2} \right) \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right), \quad (6)$$

где :  $S$  – интенсивность тензора скоростей деформаций,

$(S_{ij} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l})$  – тензор скоростей деформаций),

$P$  – давление,

$G$  – потенциал удельной равнодействующей объемных сил,

$v_i$  – компоненты скорости ( $i=1, 2, 3$ ),

$x_i$  – координаты ( $i=1, 2, 3$ ),

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера,

$f_\tau, f_n, q_\tau, q_n, \alpha$  – константы среды ( величины  $f_\tau, f_n$  – безразмерные, размерность  $q_\tau$  и  $q_n$  – Н/м<sup>2</sup>с<sup>2</sup>, размерность  $\alpha$  – 1/с).

По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Выражение (6), связывающее компоненты тензора сопротивления  $\sigma_{ij}$  с компонентами тензора скоростей деформаций  $S_{ij}$ , является искомым реологическим уравнением СТ. Проанализируем соотношение (6).

Уравнение (6) задает шесть компонент тензора сопротивления  $\sigma_{ij}$  как функции четырех величин :  $v_i$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $P$ . Потенциал объемных сил предполагается известным. Тензор  $\sigma_{ij}$  существенно нелинеен по  $S_{ij}$ . Коэффициенты  $f_\tau, f_n$  характеризуют силы трения скольжения в среде соответственно при сдвиговом и объемном деформировании. Коэффициенты  $q_\tau, q_n$  характеризуют предельное напряжение сцепления при сдвиговом и объемном деформировании. Коэффициент  $\alpha$  есть параметр среды. Он интегральным образом учитывает неодновременность начала относительного движения частиц при приложении смещающего усилия, или, другими словами, постепенность разрушения кластера сцепленных частиц.

В том случае, если в среде отсутствуют объемные деформации, второе слагаемое в (6) обращается в нуль, что соответствует приближению, используемому в известных пластических и вязких моделях [7].

Если в среде отсутствует давление и объемные силы, а также равны нулю коэффициенты сцепления  $q_\tau$  и  $q_n$ , то, как видно из (6), тензор сопротивления среды будет равен нулю.

В том случае, если величины :

$$\eta \equiv \frac{f_\tau(P + G)}{2S} + \frac{\alpha q_\tau}{\pi(\alpha^2 + S^2)^2} ; \quad (7)$$

$$\zeta \equiv \frac{f_n(P + G)}{3S} + \frac{2\alpha q_n}{3\pi(\alpha^2 + S^2)^2} ; \quad (8)$$

при каких-либо режимах внешних нагрузок остаются постоянными, то движение СТ происходит как движение линейной вязкой жидкости с коэффициентами сдвиговой  $\eta$  и объемной  $\zeta$  вязкости соответственно.

Рассмотрим простой модельный случай движения СТ, из которого видны наиболее существенные характерные особенности динамики среды, описываемой реологическим уравнением (6).

Пусть бесконечный слой среды толщиной  $h$  совершает равномерное плоскопараллельное сдвиговое течение с постоянным градиентом скорости. При этом нижняя

плоскость слоя  $z=0$  покоится, а верхняя  $z=h$  движется с некоторой постоянной скоростью  $v$  с компонентами по осям  $OX$  и  $OY$  соответственно  $v_X$  и  $v_Y$ , рис.1.

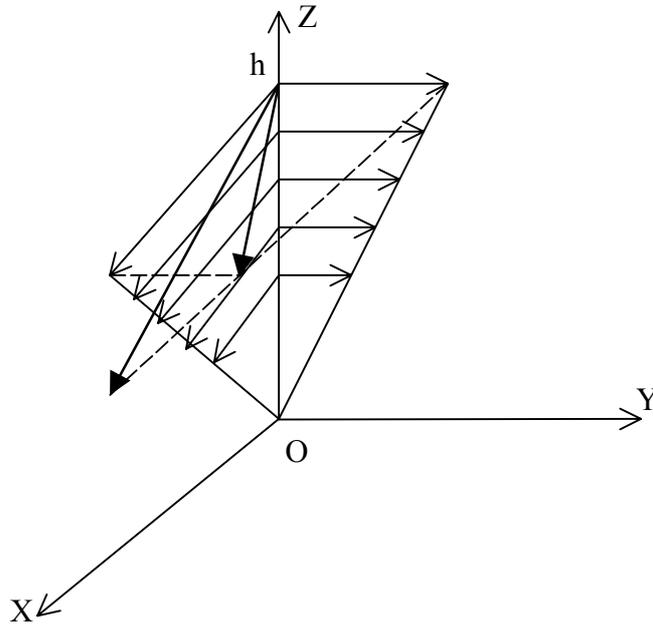


Рис.1

В этом случае :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_X}{\partial X} = \frac{\partial v_Y}{\partial Y} = \frac{\partial v_X}{\partial Y} = \frac{\partial v_Y}{\partial X} = 0 ; \quad v_Z = 0 \\ \frac{\partial v_X}{\partial Z} = \frac{v_X}{h} ; \quad \frac{\partial v_Y}{\partial Z} = \frac{v_Y}{h} ; \\ S^2 = \frac{v_X^2 + v_Y^2}{h^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Рассмотрим компоненту  $\sigma_{ZX}$  тензора сопротивления на плоскости  $Z=h$ . Из (6) с учетом (9) следует :

$$\sigma_{ZX} = \frac{f_\tau (P + G)v_X}{2(v_X^2 + v_Y^2)^{1/2}} + \frac{\alpha q_\tau h^3 v_X}{\pi(\alpha^2 h^2 + v_X^2 + v_Y^2)^2} \quad (10)$$

График зависимости  $\sigma_{ZX}(v_X)$  представлен на рис.2. Зависимость  $\sigma_{ZX}(v_X)$  является нелинейной, имеется один максимум и один минимум, два участка возрастания,

один – убывания и один – неизменности  $\sigma_{zx}$  с ростом  $v_x$ . В соответствии с этим, шкала скоростей  $v_x$  подразделяется на 4 участка (рис.2) : OA, AB, BC, CD.

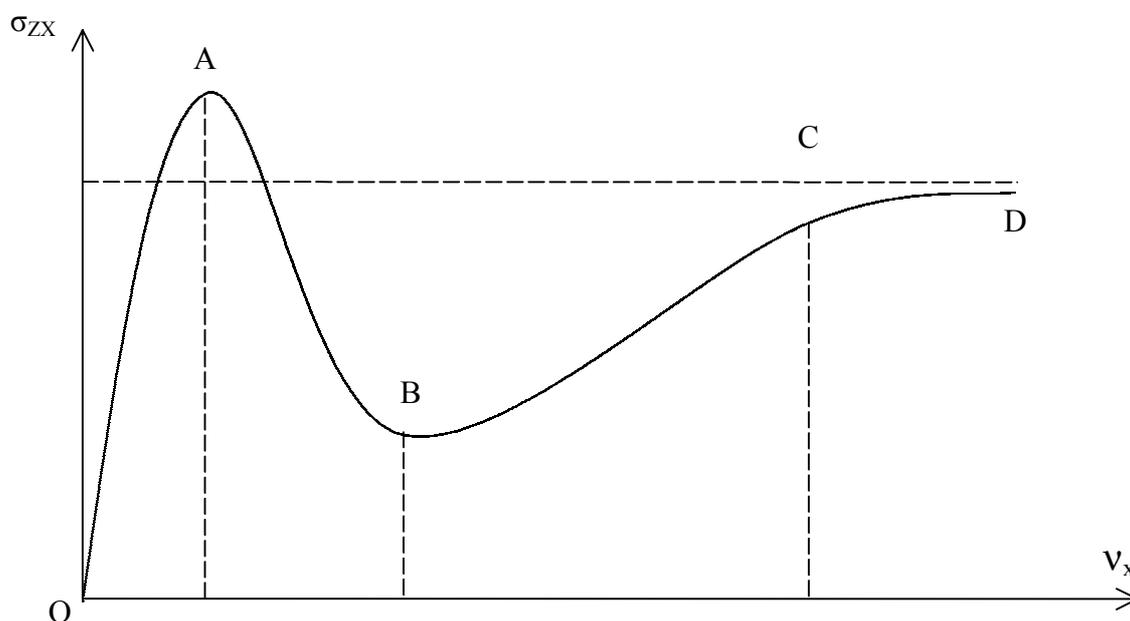


Рис.2

Точка O – начало координат, соответствует предельному состоянию среды, рассматриваемому в теории пластичности [7]. Участок OA – участок резкого возрастания напряжения  $\sigma_{zx}$  - на этом участке сверхмалым скоростям соответствуют очень высокие значения вязкости среды. Существованием этого участка объясняется эффект ползучести – сверхвязкое течение среды со сверхмалыми скоростями под действием постоянной нагрузки.

Участок AB – область аномальной вязкости среды : на этом участке с увеличением скорости напряжение сопротивления падает. Это область интенсивных структурных изменений в объеме среды : происходит лавинообразный процесс разрушения межчастичных контактов, среда становится текучей. В точке B напряжение сопротивления достигает минимума. Поведение среды в области OB «управляется» вторым слагаемым в выражении (10). Величина первого слагаемого в этой области мала.

В точке B «включается» механизм преобразованного сухого трения и поэтому в окрестности этой точки имеют место два конкурирующих эффекта : резко снижающееся напряжение покоя и возрастающее напряжение кулонова скольжения. Этим объясняется наличие минимума.

При дальнейшем росте скорости – на участке ВС имеется возрастающая, практически линейная зависимость  $\sigma_{zx}(v_x)$ . В этом диапазоне скоростей среда ведет себя как эффективная линейная вязкая жидкость с коэффициентом  $\eta$ , определяемым выражением (7). Условием применимости вязкого приближения является постоянство суммы в правой части (7).

Участок CD – область чисто кулонова трения: напряжение сопротивления пропорционально сдвигающей силе ( $P + G$ ) и не зависит от скорости.

Поведение среды в области BD «управляется» первым слагаемым выражения (10). Второе слагаемое в этой области мало.

Положение экстремумов на графике  $\sigma_{zx}(v_x)$  и диапазоны скоростей, соответствующие участкам OA, AB, BC, CD зависят как от констант среды  $f_n$ ,  $q_n$ ,  $\alpha$ , так и от параметров внешнего механического воздействия, поскольку в правую часть выражения (10) кроме  $v_x$  входят динамические переменные  $v_y$  и  $p$ .

Существуют экспериментальные результаты, подтверждающие вид зависимости  $\sigma_{zx}(v_x)$ , представленный на рис.2, в частности, наличие минимума в точке В. В [4] приводятся графики зависимости изменения удельного объема от параметров колебаний песка ([4] с.83, рис.14), а также график зависимости коэффициента уплотнения  $K$  от ускорения колебаний ([4] с.84, рис.15). На первом из этих графиков имеется минимум удельного объема при определенном значении параметров вибронагрузки, а на втором – соответственно максимум коэффициента уплотнения. Кроме этого, в литературе [10] описан так называемый псевдорезонансный эффект, заключающийся в том, что при определенных параметрах вибронагрузки, приложенной к двухкомпонентной СТ или к СТ с включениями, отличающимися по размеру и массе от частиц среды, разделение компонент происходит наиболее интенсивно. При этом график зависимости скорости разделения компонент от частоты приложенной вибронагрузки имеет отчетливый максимум.

Необходимо учитывать, что в общем случае сложного движения СТ в ее объеме будут одновременно существовать как области кулонова трения, так и области вязкого и аномального трения, а также области ползучести и тонкий слой предельного состояния. При этом слой предельного состояния является границей двух фаз среды: текучей и упругой.

Из рассмотренного частного случая движения СТ в силу непрерывности зависимости  $\sigma_{zx}(v_x)$  следует простое топологическое правило – «правило матрешки», выпол-

няющееся при любом сложном движении СТ : пространственные области различных динамических состояний среды расположены так, что (рис.3) область кулоновой среды 1 окружена областью вязкой среды 2, которая, в свою очередь, отделена от области ползучести 4 областью аномальной вязкости 3. Область ползучести отделена от области упругости 6 областью предельного состояния 5.

Необходимо сделать замечание относительно скорости  $v_Y$ , являющейся в зависимости  $\sigma_{ZX}(v_X)$  параметром. Эта скорость входит в правую часть (10) квадратично, так, что  $\sigma_{ZX}$  зависит только от ее модуля. Это означает, что все выводы проведенного анализа останутся верными также для двух других режимов движения среды :

- 1) когда частицы рассмотренного слоя среды вращаются в плоскости ZOY с градиентом угловой скорости по z не перемещаясь поступательно вдоль направления OY ;
- 2) когда частицы колеблются вдоль оси OY по импульсному закону (график зависимости перемещения от времени – прямоугольные импульсы) с градиентом скорости вдоль оси OZ в окрестности несмещаемых положений равновесия дискретным образом.

В этих случаях проявляется основное свойство дискретности сыпучей среды, состоящее в возможности скачкообразного относительного сдвига соседних частиц СТ. Это дает принципиальную возможность линеаризации системы уравнений движения СТ.

Таким образом, в настоящей работе :

- 1) Построено реологическое уравнение дискретной среды. Дополненное уравнением сохранения импульса, уравнением непрерывности, уравнением энергетического баланса, оно позволяет рассматривать механику СТ как механику нелинейной сплошной среды;
- 2) Реологическая модель, задаваемая уравнением (6), позволяет в рамках одной краевой задачи рассматривать различные псевдоагрегатные состояния СТ, реализующиеся в зависимости от параметров внешнего механического нагружения, одновременно в разных участках объема СТ;
- 3) Введены коэффициенты – материальные константы, характеризующие механическое состояние СТ независимо от его псевдоагрегатного состояния.;
- 4) Выведено общее топологическое правило, определяющее взаимное расположение зон различных псевдоагрегатных состояний в объеме СТ – «правило матрешки»;

5) Указана возможность объяснения в рамках единой реологической модели разнородных механических эффектов в вибронгруженных СТ, которые (эффекты) в других моделях не имеют достаточной для расчетов удовлетворительной механической интерпретации (псевдорезонансный эффект, эффект минимума удельного объема при определенных параметрах вибронгрузки).

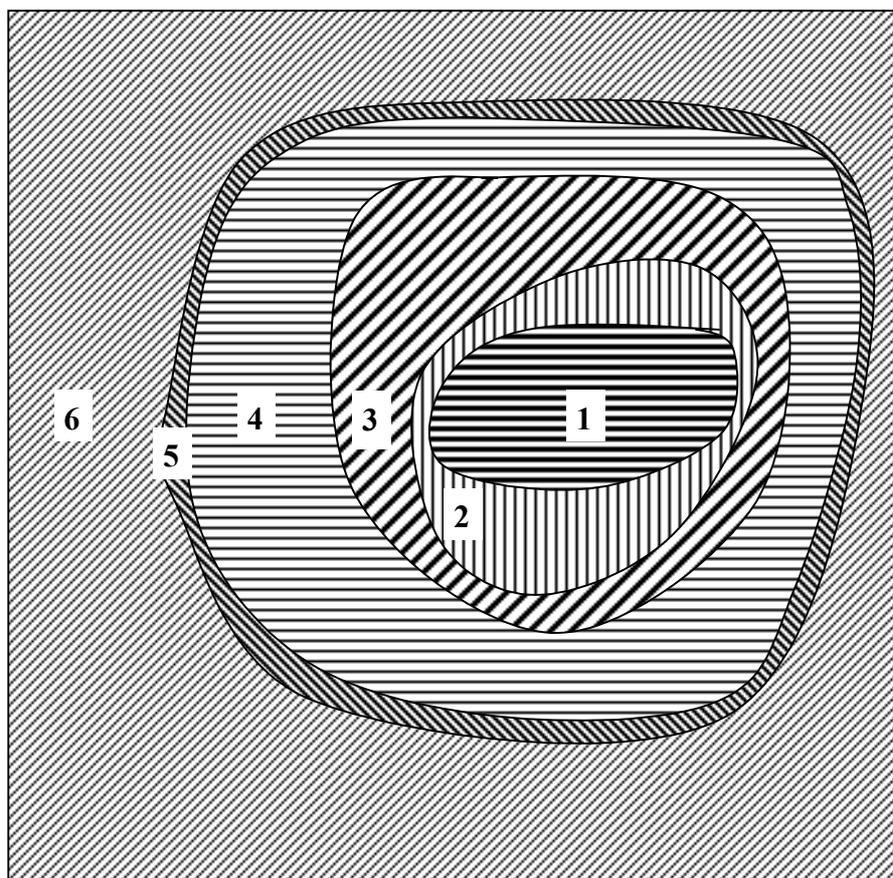


Рис.3

«Правило матрешки» для СТ :

- 1 – область кулоновой среды;
- 2 – область вязкой среды;
- 3 – область аномальной вязкости;
- 4 – область ползучести;
- 5 – область предельного состояния;
- 6 – область упругости

## Литература

1. Наполнители для полимерных композиционных материалов : Справочн.пособие / Пер. с англ. под ред. П.Г.Бабаевского, - М.: Химия, 1981. – 736 с.
2. Порошковая металлургия. Материалы, технология, свойства, области применения : Справочник / И.М.Федорченко, И.Н.Францевич, И.Д.Радомысльский и др. – Киев : Наук. думка, 1985. – 624 с.
3. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел. – М. : Стройиздат, 1977. – 256 с.
4. Вибрации в технике : Справочник. В 6-ти т., т.4 / Под общ.ред. В.Н.Челомея. – М. : Машиностроение, 1981. – 509 с.
5. Ротенберг А.В. Применение аппарата классической статистики в равновесной механике дискретных сред // Технологии и системы обработки информации и управления. – Пенза : ПГУ, 1999. – Вып.2. – с.72.
6. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. – М. : «Высшая школа», 1978. – 447 с.
7. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: «Высшая школа», 1969. – 608 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. : Наука, 1984. – 832 с.
9. Андронов В.В. Динамика систем с преобразованным сухим трением. – Диссертация ... д-ра технических наук. – М. : 1984.
10. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. – М. : Наука, 1964.