

Об учёте нелинейности объёмной деформации в деформационной теории пластичности

Агахи К.А. (Kamilla@imec.msu.ru),
Кузнецов В.Н., Шестериков С.А.

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

В работе рассмотрены варианты деформационной теории пластичности для изотропной и трансотропной сред, учитывающие нелинейное поведение объёмной деформации.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00564)

Как известно, в теории малых упругопластических деформаций [1] механические свойства материала полностью задаются одной материальной функцией $\sigma_u = \Phi(e_u)$, которая определяется из опыта на кручение тонкостенного цилиндрического образца и двумя константами – модулями сдвига G и объёмного сжатия K .

Основные уравнения обычно записываются в виде:

$$s_{ij} = 2G(1 - \omega(e_u))e_{ij} \quad (1)$$

$$\sigma = K\theta \quad (2)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}$$

Пусть $\sigma_u = \Phi(e_u)$ – экспериментально определённая зависимость между квадратичными инвариантами девиаторов s_{ij} и e_{ij} . Тогда функция нелинейности $\omega(e_u)$, без обычно принимаемого условия несжимаемости $\nu = 0,5$, определится следующим образом:

$$\omega(e_u) = \begin{cases} \frac{2Ge_u - \Phi(e_u)}{2Ge_u}, & e_u > \sqrt{\frac{2}{3}}(1 + \nu)e_s \\ 0, & e_u < \sqrt{\frac{2}{3}}(1 + \nu)e_s \end{cases}$$

$$\sigma_u^2 = s_{ij}s_{ij}, \sigma = 1/3\sigma_{ij}\delta_{ij}, e_u^2 = e_{ij}e_{ij}, \theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – тензоры напряжений и деформаций, s_{ij}, e_{ij} – соответствующие девиаторы, σ_u, e_u – их квадратичные инварианты (интенсивности), σ – среднее напряжение, θ – относительное изменение объёма, e_s – предел упругости материала, ν – коэффициент Пуассона.

В этой модели функция Пуассона φ , равная модулю отношения поперечной деформации ε_{22} к продольной ε_{11} в опыте на растяжение цилиндрического образца,

$$\varphi = \left| \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \right| \quad (3)$$

может быть выражена аналитически через введенную выше функцию $\omega(e_u)$. Действительно, в случае одноосного растяжения, когда $\sigma_{11} \neq 0$, а остальные компоненты $\sigma_{ij} = 0$, из (1) и (2) имеем, в частности

$$\sigma_{22} = 2G(1 - \omega)e_{22} + K\theta = 0$$

или

$$2G(1 - \omega) \left(\varepsilon_{22} - \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} \right) + K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 0,$$

причём, в этом опыте, очевидно, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\varphi\varepsilon_{11}$. После простых преобразований получаем, что φ является дробно-линейной функцией ω :

$$\varphi = \left| \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \right| = \frac{3\lambda + 2\mu\omega}{6(\lambda + \mu) - 2\mu\omega} \quad (4),$$

где, как известно

$$\begin{aligned} K &= \lambda + 2/3\mu \\ G &= \mu \end{aligned}.$$

Очевидно, что в пределах упругости $\omega = 0$ и $\varphi = \nu = \lambda / 2(\lambda + \mu) = \text{const}$.

Таким образом, если функция $\omega(e_u)$ найдена из опыта, то функция φ полностью определена согласно выражению (4); в то же время эта зависимость может быть построена по формуле (3) непосредственно из эксперимента, как модуль отношения измеренных в опыте на одноосное растяжение деформаций ε_{22} и ε_{11} , причём ε_{11} и ε_{22} являются функциями параметра нагружения σ_{11} . Это отношение можно представить как функцию интенсивности деформаций e_u , которая в этом случае определяется соотношением:

$$e_u = \left[\left(\varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} \right)^2 + \left(\varepsilon_{22} - \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} \right)^2 + \left(\varepsilon_{33} - \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5),$$

причём ε_{11} и $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ измерены в опыте как функции напряжения σ_{11} , играющего роль параметра нагружения. Сопоставляя (5) и (3) получаем, экспериментальную зависимость

$$\varphi = \varphi(e_u) \quad (6),$$

которая может быть сопоставлена с «теоретической» зависимостью (4). При этом совпадение гарантируется только в точке $\varepsilon_{11} = e_s$ на границе упругой области и при $\varepsilon_{11} \gg e_s$, (когда $\varepsilon_{11} ; 10\%$), и $\varphi ; 0,5$. В области упругопластических деформаций такое совпадение или близость известны для стали, дюрала и обычно не проверяются для классических сплавов. В то же время близость экспериментально найденной функции Пуассона φ (3) и функции (5), существующей в теории не гарантирована для других материалов (порошковых, армированных и т.д.), изотропных и в среднем однородных.

В случае, если эти зависимости существенно различаются, естественным представляется исправить положение путём введения второй функции нелинейности, учитывающей нелинейность зависимости относительного изменения объёма θ от среднего напряжения σ . Подчеркнём, что линейность этой зависимости является упрощающей гипотезой, экспериментальное обоснование которой для большинства материалов авторам неизвестно.

Будем считать, что соотношение (2) обобщено следующим образом:

$$\sigma = K\theta[1 - \omega_o(\theta)], \omega_o < 1$$

$$\omega_o = \begin{cases} \equiv 0, \theta < \theta^* \\ > 0, \theta > \theta^* \end{cases} \quad (7),$$

θ^* играет роль предела пропорциональности для объёмной деформации [2].

Очевидно, что функция $\omega_o(\theta)$ учитывает нелинейность изменения объёма (вообще говоря, слабую, но существенную во многих случаях).

Эта функция $\omega_o(\theta)$ может быть определена путём сравнения функции Пуассона φ найденной экспериментально и полученной аналитически из уравнений модели, учитывающей нелинейное изменение объёма. Действительно, аналогично тому, как (4) определялось из (1) и (2), мы можем определить его из соотношений (1) и (7):

$$\varphi_1 = \frac{3\lambda + 2\mu\omega(e_u) - K\omega_o(\theta)}{6(\lambda + \mu) - 2\mu\omega(e_u) - 6K\omega_o(\theta)} \quad (8).$$

Приравнявая φ_1 из (8) экспериментально определённой функции φ , формула (3), найдём функцию $\omega_o(\theta)$. Это устраняет погрешность теории, связанную с ошибкой в определении функции Пуассона φ , а так же косвенно определяет зависимость $\sigma = \sigma(\theta)$.

Продолжая рассматривать одноосное растяжение (сжатие), мы можем сравнивать величину функции ω и ω_o при значениях их аргументов, соответствующих величине ε_{11} .

Так как $\omega < 1, \omega_o < 1$, то знаменатель в формуле (8) положителен.

Пусть $\omega_o \ll \omega$, тогда

$$2\mu\omega(e_u) - K\omega_o(\theta) > 0$$

В этом случае функция Пуассона φ возрастает и стремится к величине 0,5, что естественно ожидать.

Пусть теперь ω_o и ω одного порядка. Обозначим

$$1/3(2\mu\omega(e_u) - K\omega_o(\theta)) \equiv A.$$

Тогда, если $A \geq 0$, то φ возрастает, если $A < 0$, то φ может как возрастать, так и убывать.

Таким образом устанавливается, что в теории малых упругопластических деформаций при нелинейном изменении объёма возможны самые различные варианты изменения отношения Пуассона – возрастание, убывание, немонотонное изменение. Это обстоятельство позволяет в ряде случаев применять модель (1), (7) к расчёту деталей из пористых материалов с учётом их сильной нелинейной сжимаемости.

Теперь, когда суть дела ясна из анализа изотропного случая, рассмотрим этот же вопрос для случая модели ортотропной упругопластической среды, введённой в работе [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \alpha_{ijkl}\varepsilon_{kl}\omega(e) - \alpha_{ij}^o\omega(e) - \chi_{ij}\omega_o(\bar{\theta}) \\ e = (\lambda_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \lambda\beta\theta + \lambda_{ijkl}^o\varepsilon_{ij}\delta_{kl})^{1/2} \\ \bar{\theta} = \lambda_{ijkl}^o\varepsilon_{ij}\delta_{kl} \\ \begin{cases} \omega(e) > 0, e > 1 \\ \omega_o(\bar{\theta}) > 0, \bar{\theta} > \bar{\theta}^* \end{cases} \end{cases}$$

где c_{ijkl} - тензор упругих постоянных, $\lambda_{ijkl}, \lambda_{ijkl}^o$ - материальные тензоры: первый описывает анизотропное распределение предела упругости в частице среды, второй – влияние типа напряжённого состояния с учётом анизотропии, $3\lambda = \lambda_{ijkl}^o\delta_{ij}\delta_{kl}$, β - экспериментальная константа

Эта модель представляет собой обобщение на случай ортотропных материалов теории малых упругопластических деформаций, причём она содержит две функции нелинейности ω и ω_o , аналогично (1), (7).

Остановимся на важном случае трансверсальной изотропии. Пусть имеется цилиндрический образец, ось которого параллельна оси симметрии трансверсальной изотропии, которую обозначим X_3 . Введём матричные обозначения:

$$\begin{aligned} x_{1111} \rightarrow x_{11}, \dots, x_{1122} \rightarrow x_{12}, \dots, x_{2323} \rightarrow x_{44}, \dots, x_{1212} \rightarrow x_{66}, \\ \varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{23} \rightarrow \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{12} \rightarrow \varepsilon_6. \end{aligned}$$

Пусть $\omega_o(\bar{\theta}) \equiv 0$. Тогда в условиях одноосного растяжения образца в направлении оси X_3 имеем:

$$\varepsilon_1 = -\varphi_{13}\varepsilon_3, \quad \varepsilon_2 = -\varphi_{23}\varepsilon_3, \quad \text{где } \varphi_{13} = |\varepsilon_1 / \varepsilon_3|, \quad \text{причём } \varphi_{23} = \varphi_{13}$$

и, аналогично изотропному случаю,

$$\varphi_{13} = \frac{c_{13} - (\alpha_{13} + \alpha_1^o / \varepsilon_3)\omega(e)}{c_{11} + c_{12} - (\alpha_{11} + \alpha_{12})\omega(e)};$$

(В изотропном случае $c_{11} = \lambda + 2\mu; \dots, c_{12} = \lambda, \dots, \alpha_{11} = 4/3\mu, \dots, \alpha_{12} = -2/3\mu$).

Если $\omega_o(\bar{\theta}) \neq 0$, имеем:

$$\varphi_{13} = \frac{c_{13} - (\alpha_{13} + \alpha_1^o / \varepsilon_3)\omega(e) - \frac{\chi_1}{\varepsilon_3}\omega_o(\bar{\theta})}{c_{11} + c_{12} - (\alpha_{11} + \alpha_{12})\omega(e)}$$

Список литературы

1. Ильюшин А.А. Пластичность (основы общей математической теории). Наука, М., 1963, 316 с.
2. Кузнецов В.Н., Агахи К.А. Построение материальных функций и численный метод решения краевых задач пластичности с учётом влияния гидростатического давления. Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1976, № 5, с. 130 – 135.