

Исследование зависимости давления сыпучего материала на дно и стены силоса от коэффициентов внешнего и внутреннего трения

Федосеев В.Б.(1)(339stronestore@bk.ru), Кунаков В.С.(1),
А.И.Пахайло(2)

(1)Донской государственный технический университет,
(2)совхоз «Сорго» Ростовской области.

Исследования по статике и динамике сыпучих материалов начались очень давно. Одной из основополагающих работ в области статике сыпучего материала является работа [1], которая в какой-то степени объясняла экспериментальные исследования. В частности, для давления P внутри силоса, в [1] получено выражение:

$$P_x = (\rho g S / c L) [1 - \exp(-c L y / S)].$$

Здесь $c = \mu_e P_x / P_y = \text{const}$ - основное допущение теории о пропорциональности горизонтального давления P_x вертикальному P_y . В данной формуле μ_e - коэффициент внешнего трения сыпучего материала о стенки силоса, x - высота засыпки силоса, S, L - площадь поперечного сечения и периметр силоса, ρ - плотность сыпучего материала. Как видно, кроме плотности ρ , сюда не входят физико-механические свойства самого сыпучего материала, и требует дополнительного экспериментального определения коэффициент c .

Несмотря на это, теория, изложенная в [1], получила дальнейшее развитие в работах [2,3,4,5,6,7].

В монографии [8] получена, в частности, формула для расчета давления внутри силоса без основного допущения в указанных выше работах. В частности для покоящегося сыпучего материала в силосе, формула для определения вертикального давления имеет вид:

$$P = (g R / \mu_e \tan^2 \beta) [1 - \exp(1 - \mu_e y \tan^2 \beta / R)]$$

где R – радиус силоса, β – угол укладки шаров, которыми моделируются зерна сыпучего материала. Однако в эту формулу также не входит коэффициент внутреннего трения μ_i и предполагается регулярная укладка шаров.

Для устранения этих ограничений (регулярная укладка) и недостатков (отсутствие коэффициента внутреннего трения), возьмем в качестве исходной, модель сыпучего материала, предложенную в [8], но не будем ограничиваться регулярной укладкой шаров. Более того, первоначально вообще не будем задаваться какой-либо формой элементов сыпучего материала, а зададимся только коэффициентом внутреннего трения μ_i , который будем считать известным (также как и коэффициент внешнего трения μ_e).

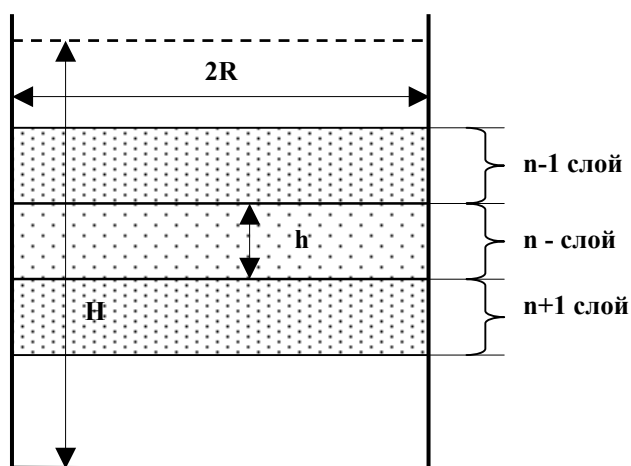


Рис.1. Распределение слоев в силосе.

Рассмотрим силос радиуса R , в котором находится сыпучий материал, высотой засыпки H . Этот сыпучий материал разобьем на горизонтальные слои высотой h , так что $h = H / N_1$, где N_1 – число слоев (см. рис.1). Далее рассмотрим один какой-то горизонтальный слой, как показано на рис.2., где F_1

– внешняя сила, действующая на рассматриваемый слой сверху, F_2 – внешняя сила, действующая на рассматриваемый слой снизу. Выделенный слой разобьем на клиновидные коаксиальные кольца.

Каждое кольцо обладает массой m равной: $m = \rho g S_{\text{тр}} 2\pi r$, где ρ – объемная плотность сыпучего материала, $S_{\text{тр}}$ – площадь треугольного поперечного сечения кольца $S_{\text{тр}} = dh/2$, r – радиус кольца. На каждое кольцо

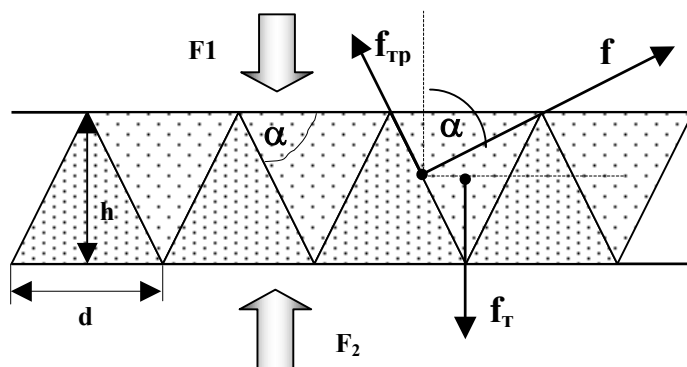


Рис.2. Схема разделения слоя на кольца.

действует сила тяжести. Сила тяжести, приходящаяся на единицу длины кольца f_t , будет равна $\rho g d h / 2$. К этой силе тяжести на единицу длины, направленной вниз, для колец с острием направленным вниз, добавится компонента внешней силы F_1 на единицу длины, равная $F_1 d / \pi R^2$. Таким образом, на единицу длины кольца с острием направленным вниз, действует сила F_d , направленная вниз и равная $F_d = \rho g d h / 2 + F_1 d / \pi R^2$. Эта сила уравнивается суммой вертикальных компонент сил f и $f_{тр}$, направленных вверх (см. рис.2). Здесь сила f - сила реакции соседних колец с остриями, направленными вверх, $f_{тр}$ - сила трения между слоями сыпучего материала. Следовательно, условие равновесия кольца, с острием направленным вниз, будет иметь вид:

$$2 f \cos \alpha + 2 f_{тр} \sin \alpha = F_d = \rho g d h / 2 + F_1 d / \pi R^2 \quad (1)$$

Положим вначале, что сила трения между слоями сыпучего материала определяется по закону сухого трения, т.е. $f_{тр} = \mu_i f$, где μ_i - коэффициент внутреннего трения. Подставляя в (1) это значение силы трения, для силы реакции соседних колец получим следующее выражение:

$$f = (\rho g d h / 2 + F_1 d / \pi R^2) / 2(\cos \alpha + \mu_i \sin \alpha) \quad (2)$$

В этом случае горизонтальная составляющая силы $F_{гор}$, вызывающая горизонтальное сжатие сыпучего материала, $F_{гор} = f \sin \alpha - f_{тр} \cos \alpha$, будет определяться выражением:

$$F_{гор} = (\rho g d h / 2 + F_1 d / \pi R^2) (\sin \alpha - \mu_i \cos \alpha) / 2(\cos \alpha + \mu_i \sin \alpha) \quad (3)$$

Согласно рис.2, $\tan \alpha = 2h/d$. Следовательно, сила $F_{гор}$ будет равна:

$$F_{гор} = (\rho g h^2 / 2 + F_1 h / \pi R^2) (1 - \mu_i / \tan \alpha) / (1 + \mu_i \tan \alpha) \quad (4)$$

Т.к. это сила на единицу длины, то на боковую поверхность силоса по всей высоте слоя h , будет действовать сила F_6 , равная:

$$F_6 = (\rho g h^2 \pi R + 2 F_1 h / R) (1 - \mu_i / \tan \alpha) / (1 + \mu_i \tan \alpha) \quad (5)$$

Или, боковая поверхность силоса будет испытывать давление P_6 , равное:

$$P_6 = (\rho g h / 2 + F_1 / \pi R^2) (1 - \mu_i / \tan \alpha) / (1 + \mu_i \tan \alpha) \quad (6)$$

Из выражения (6) видно, что если коэффициент внутреннего трения μ_i равен нулю (идеальная жидкость, вязкость которой равна нулю), то боковое давление на стенку будет определяться известным уравнением:

$$P_6 = \rho gh/2 + P_0$$

где P_0 - внешнее давление, равное в нашем случае $P_0 = F_1/\pi R^2$.

Далее, на каждое кольцо, с острием направленным вверх, действует сила тяжести на единицу длины и сила F_d , также на единицу длины и также направленная вниз. Следовательно, результирующая сила на единицу длины, действующая на кольцо с острием вверх, равна $\rho gdh/2 + F_d = \rho gdh + F_1 d/\pi R^2$. Поскольку ширина основания кольца равна d , то сила на единицу площади основания слоя сыпучего материала F_s , будет равна

$$F_s = (\rho gdh/2 + F_d) / d = \rho gh + F_1/\pi R^2$$

Отсюда следует, что суммарная сила F_Σ , действующая на нижнюю поверхность сыпучего материала и направленная вниз, будет равна:

$$F_\Sigma = F_s \pi R^2 = \rho gh \pi R^2 + F_1 = \rho gV + F_1 = Mg + F_1 \quad (7)$$

где V – объем слоя, M - масса слоя сыпучего материала.

Между внутренней поверхностью стенки силоса и сыпучим материалом действует сила трения. Вначале также будем считать, что это сила сухого трения. Таким образом на слой сыпучего материала будет действовать еще одна, направленная вверх, внешняя сила - сила бокового трения $F_{\text{тр}}^6 = \mu_e F_6$, где μ_e - коэффициент внешнего, сухого трения. Используя выражение (5), для этой силы получим выражение:

$$F_{\text{тр}}^6 = \mu_e (\rho gh^2 \pi R + 2F_1 h / R) (1 - \mu_i / \text{tg} \alpha) / (1 + \mu_i \text{tg} \alpha) \quad (8)$$

Таким образом, сила F_2 , действующая на нижнюю поверхность слоя сыпучего материала будет равна:

$$F_2 = F_\Sigma - F_{\text{тр}}^6 = (Mg/2 + F_1)(1 - \mu_e A 2h/R) + Mg/2 \quad (9)$$

где, для сокращения записи, использовано: $A = (1 - \mu_i / \text{tg} \alpha) / (1 + \mu_i \text{tg} \alpha)$;

, здесь N_1 – число слоев, N_2 - число колец, F_1 -

$$A = \frac{1 - \mu_i \frac{RN_1}{2HN_2}}{1 + \mu_i \frac{2HN_2}{RN_1}}$$

сила, действующая на верхнюю поверхность слоя сыпучего материала.

Так как сила F_1 равна по модулю силе, действующей на нижнюю поверхность вышележащего слоя, то для неё получается рекурсивная формула:

$$F_n = (Mg/2 + F_{n-1})(1 - \mu_e A 2h/R) + Mg/2 \quad (10)$$

где F_0 может быть равна нулю, если верхняя поверхность силоса свободная, либо некоторой заданной величиной.

Если уравнение (10) разделить на площадь основания слоя сыпучего материала, то получится рекурсивная формула для расчета давления P_n^d на нижнюю поверхность слоя (с начальным условием - $P_0^d = 0$):

$$P_n^d = (\rho g H / 2N_1 + P_{n-1}^d)(1 - \mu_e A 2H / RN_1) + \rho g H / 2N_1 \quad (11)$$

Из формулы (6) можно получить рекурсивную формулу для расчета давления на боковую стенку силоса на уровне соответствующего слоя:

$$P_n^b = (\rho g H / 2N_1 + P_{n-1}^d) A \quad (12)$$

Таким образом, по формулам (11) и (12) можно вычислить давление на дно и стенки силоса, если известны величины: R – радиус силоса, H – высота силоса, γ – плотность сыпучего материала, μ_e – коэффициент внешнего трения, μ_i – коэффициент внутреннего трения, и необходимо задаться давлением на верхней поверхности силоса - P_0 , а также числом слоев - N_1 и числом

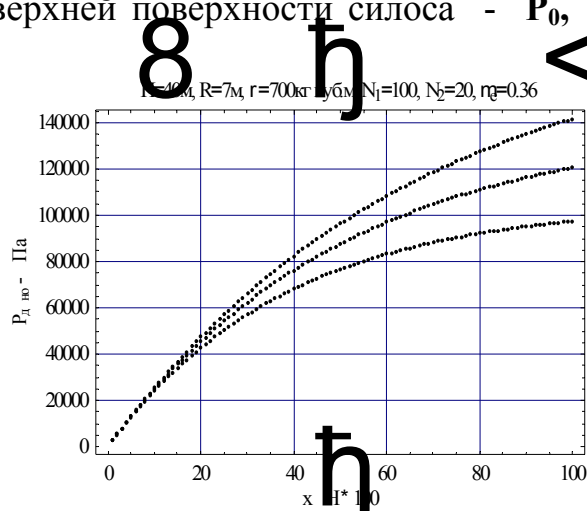


Рис.3. Зависимость давления на дно силоса от высоты засыпки при $\mu_i = 0.2, 0.35, 0.5$ (снизу вверх).

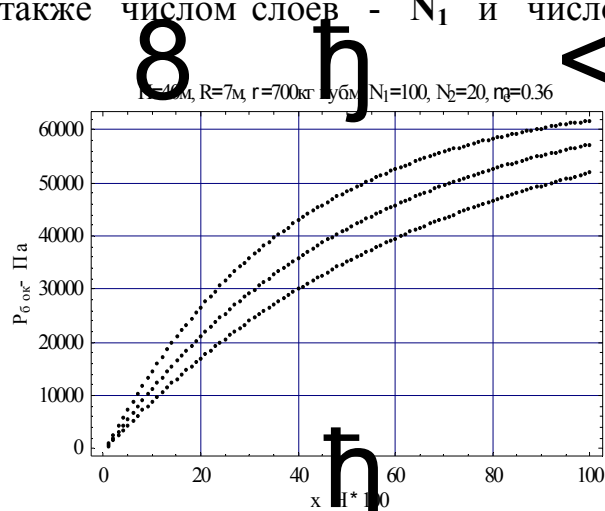


Рис.4. Зависимость давления на боковую стенку силоса от высоты засыпки при $\mu_i = 0.20, 0.35, 0.50$ (сверху вниз).

колец в слое - N_2 .

На рис.3 изображен график зависимости давления на горизонт силоса, при различной высоте этого горизонта, для разных коэффициентов внутреннего трения μ_i . По горизонтальной оси отложена высота горизонта x в процентах от H . На рис.4. изображен аналогичный график, но для бокового давления.

На рис.5 изображен график давления на горизонт для разных коэффициентов внешнего трения μ_e , и на рис.6 аналогичный график для бокового давления.

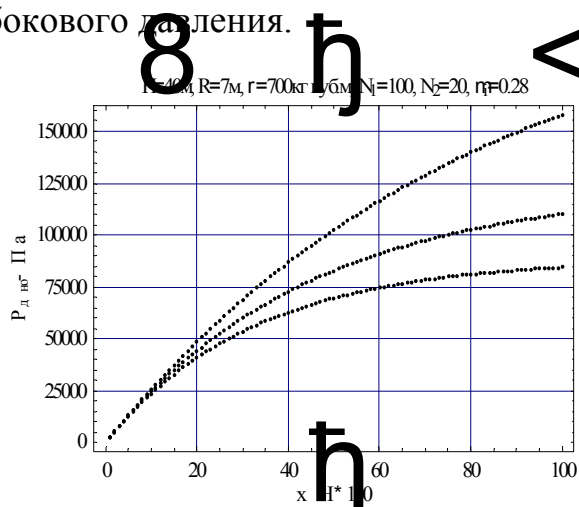


Рис.5. Зависимость давления на дно силоса от высоты засыпки при $\mu_e = 0.20, 0.35, 0.50$ (сверху вниз).

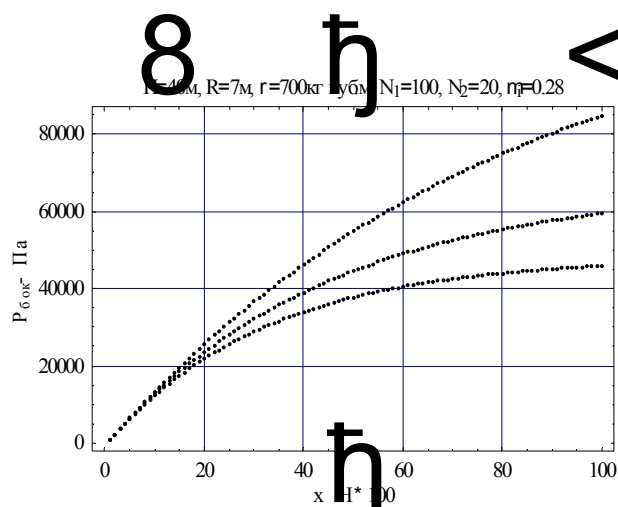


Рис.6. Зависимость давления на боковую стенку силоса от высоты засыпки при $\mu_e = 0.20, 0.35, 0.50$ (сверху вниз).

Как видно из графиков, давление в силосе с учетом коэффициентов внешнего и внутреннего трения существенно отличается от гидростатического давления $P_{г, \max} = 274\,680$ Па.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jansen H.A. Versuche uber Getreidedruck in Silozellen // Z.d.VDI. 1895, b. XXXIX, № 35. S. 1045 – 1049.
2. Wilman E. Uber einige Gebirgsdruckerscheinungen. U.S.W. Berlin, 1900, s. 42 – 58.
3. Гутьяр Е.М. Вопросы динамики сыпучей среды // ЦНИИСК - Научные сообщения. М., 1958, вып. 2. с. 41 – 43.

4. Гутьяр Е.М. Распределение давления на стенки силосной башни // Тр. ин-та / Моск. автодор. ин-т. М., 1935, Сб. 2. с. 182 – 184.
5. Сорокин Н.В. Обобщение формулы Янсена для силосов, наполненных разнородными материалами. // Советское мукомолье и хлебопечение. 1934, № 3. с. 16 – 17.
6. Сорокин Н.В. Давление сыпучих тел на стены и дно силосов переменного сечения. // Советское мукомолье и хлебопечение. 1935, № 4. с. 17 – 20.
7. Сорокин Н.В. Давление вытекающего зерна на стены и дно силосов. // Советское мукомолье и хлебопечение. 1936, № 2. с. 23 – 26.
8. Гячев Л.В. Основы теории бункеров. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. 1992, 312с.