

Дискретные модели деформируемых систем с односторонними ограничениями перемещений

Колесников Г.Н. (kgn@sampo.ru)

Петрозаводский государственный университет

1. Основная проблема и некоторые пути ее решения. Основная проблема теории деформируемых систем с односторонними связями заключается в выявлении действительного состояния данных связей при известном воздействии на систему, или, кратко – в определении рабочей схемы [13]. Существуют математически обоснованные методы решения основной проблемы, сводящие поиск рабочей схемы к задаче квадратичного программирования [3, 12] или к линейной задаче дополнителности [4, 11]. Известны другие, например, эвристические подходы к решению проблемы [15].

В данной статье исследован подход, который появился исторически первым, но не получил достаточного математического и, как оказалось, физического обоснования. Вместе с тем, выработаны некоторые основные положения.

(1) *Реакция и перемещение, совместные с данной односторонней связью, неотрицательны* [13].

(2) *Реакция R_i односторонней связи i совместна с состоянием «включено», если выполняется условие*

$$R_i > 0. \quad (1)$$

В этом случае равно нулю перемещение U_i по направлению реакции R_i [13].

(3) *Величина реакции (или перемещения), при которой односторонняя связь механической системы переходит в альтернативное состояние, рассматривается как порог переключения* [5, 7]. *Имеют место пороги включения односторонних связей и пороги выключения связей* [10].

Исследования деформируемых систем с односторонними связями обычно выполняются в принимаемом по умолчанию предположении, что нижний и верхний пороги переключения равны, соответственно, $\underline{f}_i = 0$ и $\overline{f}_i = \infty$. Понятие порога переключения односторонней связи введено и эффективно использовано в работах [5, 6, 10].

На основании условия (1) в известных работах [13] предполагалось, что действительное состояние системы односторонних связей можно найти с помощью итерационной процедуры, которая была опубликована в 1950 г. В этой процедуре на каждой итерации выполняется обычный линейный расчет в предположении, что все односторонние связи являются двусторонними, определя-

ются их реакции и отбрасываются все односторонние связи, реакции которых не отвечают условию (1). Такой способ поиска рабочей схемы не имеет математического обоснования, что указано в книге [12]. В попытках его физического обоснования оставалось незамеченным принципиально важное обстоятельство [5].

В книге [12] на примерах показано, что этот, казалось бы, физически очевидный способ поиска рабочей схемы не гарантирует сходимости к точному решению и таит опасность заикливания.

Причины заикливания и отсутствия гарантий сходимости оставались неизвестными до появления в 2003 г. работ [5, 7], в которых было установлено, что односторонние связи переходят из текущего своего состояния в альтернативное состояние поочередно, в порядке достижения их реакциями порога переключения. Гипотеза об очередности и доказательства ее правомерности [10] составили основу метода последовательного выключения связей, идея которого с 1999 г. применялась при построении алгоритмов биомеханического анализа фрагментов скелетно-мышечных систем [8, 9].

Первая (эвристическая) версия алгоритма метода последовательного выключения связей, которая использовалась при решении некоторых задач биомеханики [8], может рассматриваться как результат усовершенствования указанного выше способа определения рабочей схемы [13]. Усовершенствование заключается в выполнении тех же линейных расчетов, но в отбрасывании после каждого шага не всех связей по условию (1), а только одной связи i , реакция R_i которой отвечает одному из следующих условий

$$R_i = \min_k R_k < \underline{f}_i \text{ или } R_i = \max_k R_k > \bar{f}_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Здесь n – общее число односторонних связей.

На физическом уровне легко усмотреть аналогию гипотезы об очередности с хорошо известной теорией слабого звена. Согласно этой теории, надежность всей конструкции определяется надежностью наиболее напряженного ее компонента, несущая способность которого исчерпывается и который разрушается первым. Очевидно, такой компонент идентичен односторонней связи, которая выключается при нагрузке, соответствующей пределу прочности компонента.

С другой стороны, наиболее нагруженную одностороннюю связь, находящуюся в состоянии «включено», можно интерпретировать как слабое звено конструкции, которое выключается раньше других. Из оставшихся включенными односторонних связей выключается наиболее нагруженная, и так далее. Последовательный процесс выключения связей будет завершен, если силы во всех оставшихся включенными связях окажутся меньше порога переключения.

Данная интерпретация гипотезы представляет, по существу, изложение универсального алгоритма расчета механических систем с односторонними свя-

зьями, обоснованного исходя из физических соображений. Фактически это алгоритм метода последовательного выключения связей по условиям (2).

Из сказанного выше можно сделать два очевидных вывода.

1. Реальную двустороннюю можно рассматривать частный случай односторонней связи, которая выключается при нагрузке, соответствующей пределу прочности при сжатии или при растяжении.
2. Одним из практических применений метода последовательного выключения связей может быть анализ состояния инженерных конструкций при моделировании развития аварийных ситуаций многоэлементных конструкций зданий и инженерных сооружений.

2. Жордановы исключения в дискретных моделях деформируемых систем с односторонними связями. Рассмотрим деформируемую систему, образованную абсолютно жесткими и (или) податливыми компонентами. В механической системе могут быть как двусторонние, так и односторонние связи произвольного вида. Эти связи, как и остальные компоненты механической системы, могут быть представлены жесткими и (или) податливыми компонентами. Исследуем задачу определения действительного состояния односторонних связей данной механической системы. Предположим, что из общего числа n связей только $k \leq n$ являются односторонними.

Осуществление методов решения указанной выше основной проблемы сводится, в конечном счете, к отысканию неотрицательного решения \mathbf{R} , \mathbf{U} системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{B} \quad (3)$$

с положительно определенной матрицей \mathbf{A} . Если \mathbf{A} – матрица жесткости конструкции, то элементы векторов \mathbf{R} и \mathbf{U} представляют собой, соответственно, реакции и перемещения, совместные с односторонними и двусторонними (если таковые имеются) связями. Всегда выполняются условия

$$R_i \geq 0; U_i \geq 0; R_i U_i = 0, i = 1, 2, \dots, k. \quad (4)$$

Состояние системы k односторонних связей описывается $2k$ параметрами, из которых k параметров обязательно равны нулю. Априори неизвестно, какие именно переменные R_i , U_i будут равны нулю. Но очевидно, что с формальной точки зрения задача определения рабочей схемы сводится к поиску неотрицательного решения системы уравнений (3) при ограничениях (4).

Рабочая схема может быть найдена с использованием известных подходов, методов и алгоритмов [3, 4, 11, 12]. Далее рассматривается альтернативный, предположительно наиболее экономичный путь точного решения задачи.

Систему уравнений (3) тождественными преобразованиями можно трансформировать в некоторую другую систему

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (5)$$

в которой k компонентами вектора \mathbf{x} представлены только те реакции и пере-

мещения, совместные с односторонними связями, которые обязательно равны нулю. Система линейных соотношений (5) может рассматриваться как математическое описание некоторой воображаемой механической системы, которая в строительной механике [14] выступает в роли основной системы, вообще говоря, смешанного метода. Не исключено, что это может быть основная система метода сил или метода перемещений, т.е. – частный случай основной системы смешанного метода.

По определению, неизвестные смешанного метода представлены двумя группами переменных. Одна группа образована неизвестными реакциями, вторая – неизвестными перемещениями. Теоремами и методами строительной механики допускается известная свобода выбора основной системы смешанного метода и, соответственно, свобода разбиения $2k$ неизвестных на две группы.

Идея предлагаемого пути решения основной проблемы заключается в том, чтобы в одну группу включить k неизвестных смешанного метода, которые обязательно равны нулю. Эти k неизвестных представляют собой реакции тех односторонних связей, которые будут находиться в искомой рабочей схеме в состоянии «выключено», а также перемещения тех односторонних связей, которые будут находиться в искомой рабочей в состоянии «включено». Для осуществления предлагаемого пути необходимы критерии очередности шагов.

Критерии очередности перехода односторонних связей в состояние «выключено» установлены в виде (2). Аналогично могут быть представлены критерии очередности перехода односторонних связей в состояние «включено»

$$U_i = \min_j U_j < \underline{u}_i \text{ или } U_i = \max_j U_j > \bar{u}_i, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (6)$$

Обычно расчеты выполняются для принятых по умолчанию значений порогов переключения $\underline{u}_i = 0$; $\bar{u}_i = \infty$.

Вектор \mathbf{x} в (5) формируется из равных нулю элементов векторов \mathbf{R} и \mathbf{U} . В этом случае неотрицательное решение исходной системы, если оно существует, будет представлено в виде $\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Тем самым поиск решения будет завершен.

Осуществить такой поиск можно, если систему (3) трансформировать в систему (5), например, с помощью жордановых исключений, выполнив их в определенной очередности. Действительно, если A_{ii} – разрешающий элемент в уравнении метода сил (перемещений), то жорданово исключение изменяет физический смысл данного уравнения, трансформируя его в уравнение метода перемещений (сил). В итоге основная система метода перемещений (сил) преобразуется в основную систему смешанного метода. С формальной точки зрения каждое жорданово исключение приводит к новому разбиению неизвестных R_i и U_i на две указанные выше группы. С точки зрения строительной механики каждое жорданово исключение порождает очередной вариант основной системы

смешанного метода. Множество всех возможных вариантов основной системы, полученных таким способом, будет включать в себя и тот вариант, в котором все неизвестные смешанного метода равны нулю. Чтобы осуществить обозначенную выше идею, необходимо указать кратчайший путь к выявлению k неизвестных, которые обязательно, как уже отмечалось, равны нулю.

Описание вычислительной схемы жордановых исключений, комментарии, примеры для конструкций с двусторонними связями и библиографию по этому вопросу можно найти в книге [12]. В подобной постановке системы с односторонними связями в известной нам литературе не рассматривались.

Число вариантов возможных состояний деформируемой системы с k односторонними связями, как известно, равно 2^k . Но осуществляется только один из них, отвечающий принципу минимума потенциальной энергии.

Опираясь на известные методологические принципы [2], можно предположить, что математическая модель эффективна в вычислительном отношении в той мере, в какой она адекватна физическому своему прототипу. Если говорить о механических системах с односторонними связями, то сходимость алгоритма к точному решению за конечное число шагов и его эффективность в вычислительном отношении гарантируют предложенные и обоснованные в [10] правила выбора разрешающего элемента, которые устанавливают очередность выполнения жордановых исключений. Эти правила могут рассматриваться как следствия теоремы об очередности, которая, вероятно, адекватно отражает физический процесс перехода системы односторонних связей в альтернативное состояние [5]. Данные правила реализованы в следующем шаговом алгоритме 1.

Алгоритм 1. Если в системе вида $\mathbf{R} = \mathbf{AU} + \mathbf{B}$ все $B_i \geq 0$, то задача решена. Иначе определяем разрешающую строку j , критерием выбора которой является элемент B_j , наименьший среди отрицательных элементов. Пусть $B_j = \min_i B_i$. По условию задачи диагональный элемент $A_{jj} > 0$, его выбираем в качестве разрешающего и выполняем жорданово исключение. В результате переменные Y_j и X_j в системе уравнений меняются местами. Повторяем шаг.

Конечность алгоритма 1 следует из того, что невозможен повторный выбор какого-либо уравнения в качестве разрешающего. Такой выбор невозможен, т. к. значение свободного члена в уравнении, которое однажды было выбрано ведущим, может только возрастать [10].

Если в механической системе имеется n связей, из которых k – односторонние, то все уравнения для двусторонних связей записываются в систему уравнений в первую очередь. Выполняем $(n - k)$ шагов прямого хода метода Гаусса. Подсистема k уравнений обрабатывается по алгоритму 1.

Найдем оценку объема вычислений. Пусть число равенств в системе соот-

ношений (или число двусторонних связей) равно Gn , а число неравенств (или число односторонних связей) равно $(1-G)n$, где $0 \leq G \leq 1$. Число жордановых исключений равно $J(1-G)n$, где $0 \leq J \leq 1$. Оценку объема вычислений при однократном решении системы n линейных алгебраических уравнений, равную αn^3 , принимаем за единицу. Тогда относительная оценка объема вычислений по предлагаемому алгоритму определяется выражением $G^3 + \frac{J(1-G)^3}{2\alpha}$. С уменьшением коэффициента α (в области его значений для известных методов решения систем линейных алгебраических уравнений) верхняя оценка объема вычислений приближается к величине $1/2\alpha$. Ленточная структура матрицы не принята во внимание. Оценки верны для достаточно больших значений n .

Рассмотренная шаговая процедура с применением жордановых исключений может толковаться как обобщение алгоритма смешанного метода для дискретной модели, компонентами которой являются односторонние связи произвольного вида. Наличие двусторонних связей при этом не исключается.

Любопытно, что полный анализ конструкции с учетом кусочно-линейного характера зависимостей может потребовать меньшего объема вычислений, чем линейный расчет на одном участке области определения данных зависимостей.

3. Очередность шагов прямого хода метода Гаусса и дискретные модели деформируемых систем с односторонними связями. Рассмотрим обобщенный алгоритм метода перемещений, который *всегда* требует для полного анализа конструкции с учетом кусочно-линейного характера зависимостей не большего (как правило – меньшего) объема вычислений, чем однократный линейный расчет на одном участке области определения данных зависимостей. Можно показать [10], что в алгоритме 1 элементы разрешающего столбца j необходимы только до шага j и потому могут быть вычеркнуты из списка дальнейших вычислений. Это означает, что доказательства сходимости к точному решению за конечное число шагов могут быть распространены на рассматриваемый далее алгоритм 2. В алгоритме 2 используется тот факт, что один шаг прямого хода метода Гаусса, выполненный над системой линейных алгебраических уравнений отражает на формальном уровне процедуру удаления (восстановления) в основной системе метода перемещений (сил) той связи, которая была установлена (удалена) при образовании воображаемой конструкции, получившей в строительной механике название основной системы [12].

Алгоритм 2. Если в системе вида $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{B}$ все $B_i \geq 0$, то задача решена. Иначе определяем ведущую строку, критерием выбора которой является элемент вектора \mathbf{B} , наименьший среди отрицательных. Пусть $B_j = \min_i B_i$. По условию задачи диагональный элемент $A_{jj} > 0$, его выбираем в качестве веду-

щего и выполняем один шаг прямого хода метода Гаусса. Тем самым связь j метода перемещений (сил) переводится в состояние «выключено» («включено»). Повторяем шаг алгоритма 2.

Рассмотренная шаговая схема вычислений с применением исключений по методу Гаусса может толковаться как обобщение алгоритма метода перемещений (сил) для дискретной модели, компонентами которой являются односторонние связи произвольного вида. Наличие двусторонних связей не исключается.

В практическом отношении большой интерес представляет обобщенный алгоритм метода перемещений. Если оценку объема вычислений при однократном решении соответствующей системы линейных алгебраических уравнений принять за единицу, то относительная оценка объема вычислений равна $(1 - w(1 - G))^3$, где $0 \leq G \leq 1$ – относительное число соотношений в виде равенств (или число двусторонних связей); $0 \leq w \leq 1$ – относительное число односторонних связей, действительное состояние которых – «включено».

4. Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим пример (рис. 1), рекомендованный в книге [12] для тестирования программных комплексов, предназначенных для анализа механических систем с односторонними связями.

Расчет конструкции выполним с использованием пяти неизвестных смещений U_i ($i = 1 \dots 5$). Матрицу жесткости \mathbf{A} и вектор свободных членов \mathbf{B} представим в табличной форме (7). Выполнив два шага прямого хода алгоритма Гаусса (в общем случае число шагов равно числу двусторонних связей), получим систему соотношений в табличной форме (8).

	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	\mathbf{B}
$R_1 =$	178	44,50	0	66,75	0	0
$R_2 =$	44,5	155,75	66,75	33,375	33,375	0
$R_3 =$	0	66,75	133,5	66,75	0	-0,7707
$R_4 =$	66,75	33,375	66,75	83,438	-16,688	-4,3597
$R_5 =$	0	33,375	0	-16,688	16,688	2,1155

(7)

$R_1 =$	1	0,25	0	0,375	0	0
$R_2 =$		1	0,4615	0,1154	0,2308	0
$R_3 =$			102,69	59,048	-15,4	-0,7707
$R_4 =$			59,048	56,481	-20,538	-4,3597
$R_5 =$			-15,4	-20,538	8,9856	2,1155

(8)

Нагрузка:
 $F_1=0,7707$; $F_2=4,3597$;
 $F_3=2,1155$.

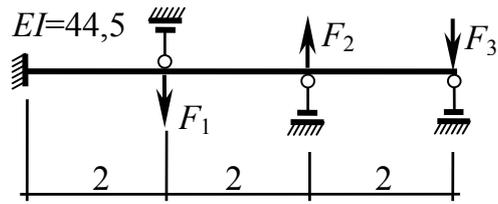
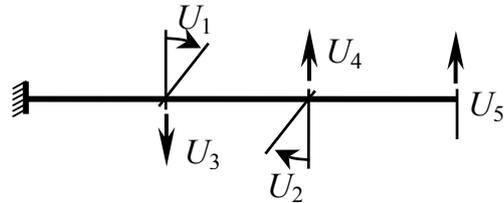
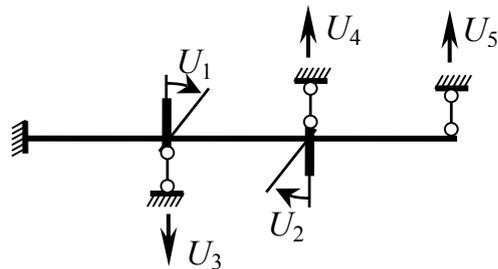


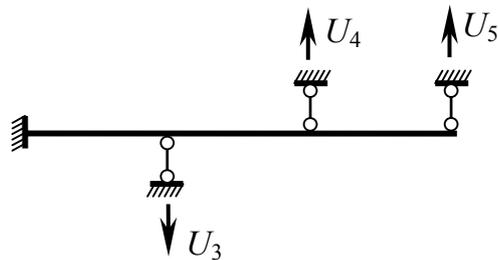
Схема конструкции с удаленными односторонними связями.



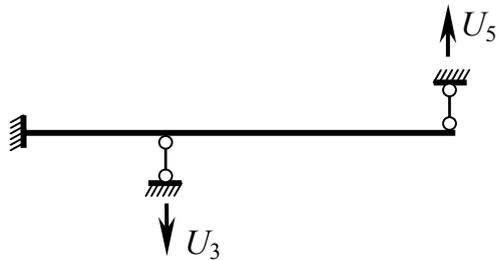
Основная система метода перемещений.



Основная система метода перемещений, описываемая системой уравнений после двух шагов прямого хода алгоритма Гаусса.



Основная система метода перемещений, описываемая системой уравнений, которые преобразованы по алгоритму 2. Состояние основной системы идентично состоянию исходной конструкции при заданной нагрузке.



$$U_3 = U_5 = 0$$

Рис. 1.

Уравнения с порядковыми номерами 3, 4, 5 в таблице (8) описывают основную систему метода перемещений с тремя неизвестными U_3 , U_4 , U_5 (рис. 1). В нашем случае это параметры состояния односторонних связей.

Для определения действительного состояния односторонней связи j воспользуемся условием выключения связи, которое запишем в виде

$$B_j = \min_i B_i < 0. \quad (9)$$

Применяя условие (9) к соотношениям (8) находим, что $j = 4$. Выполним перестановку строк и столбцов:

	U_1	U_2	U_4	U_3	U_5	B
$R_1 =$	1	0,25	0	0,375	0	0
$R_2 =$		1	0,4615	0,1154	0,2308	0
$R_4 =$			56,481	59,048	-20,538	-4,3597
$R_3 =$			59,048	102,69	-15,4	-0,7707
$R_5 =$			-20,538	-15,4	8,9856	2,1155

(10)

Выполнив один шаг алгоритма 2, трансформируем (10) к виду (11).

	U_1	U_2	U_4	U_3	U_5	B
$R_1 =$	1	0,25	0	0,375	0	0
$R_2 =$		1	0,4615	0,1154	0,2308	0
$R_4 =$			1	1,0454	-0,3636	-0,07719
$R_3 =$				40,9583	6,0714	3,78717
$R_5 =$				6,0714	1,5174	0,53015

(11)

Два оставшихся уравнения являются математическим описанием основной системы метода перемещений с неизвестными U_3 и U_5 (рис. 1). Свободные члены данных уравнений представляют собой реакции связей в основной системе метода перемещений. Эти реакции не отвечают условию перехода в состояние «выключено» (9). Следовательно, реакции этих связей могут отличаться от нуля. Тогда из условия $R_i U_i = 0$ (4) следует, что $U_3 = U_5 = 0$. Найденное состояние основной системы метода перемещений, описываемое двумя оставшимися уравнениями, идентично состоянию исходной конструкции при заданной нагрузке. Находим: $R_3 = 3,78717$; $R_5 = 0,53015$.

Поскольку $U_3 = U_5 = 0$, то в дальнейших вычислениях арифметические операции с элементами соответствующих столбцов могут быть исключены. В таблице (11) эти элементы перечеркнуты. Обратный ход метода Гаусса выполняется над треугольным блоком, структура которого очевидна.

Аналогично выполняются вычисления по обобщенному алгоритму метода сил при наличии односторонних связей в исследуемой механической системе.

Литература

1. Величенко В.В. Механика трансформирующихся систем / В.В. Величенко // ДАН. 2003. Том 388. № 6. С. 149-150.
2. Горбачев В.В. Проблемы современного естествознания / В.В. Горбачев // Вестник РАЕН. 2000. № 1. С. 1-6.
3. Гордеев В.Н. Расчет упругих систем с односторонними связями как задача квадратичного программирования / В.Н. Гордеев, А.В. Перельмутер // Исследования по теории сооружений. Вып.15. М.: Стройиздат, 1967. С. 208 – 212.
4. Ким Т.С. Расчет систем с односторонними связями как задача о дополнительной / Т.С. Ким, В.Г. Яцура // Строит. механика и расчет сооружений. 1989. №3. С.41-44.
5. Колесников Г.Н. Закон очередности перехода односторонних связей в действительное состояние и его применение в математических моделях упругих механических систем / Г.Н. Колесников. Петрозаводск: ПетрГУ, 2003. 20 с. Деп. в ВИНТИ 21.05.03, № 981-B2003.
6. Колесников Г.Н. Об очередности жордановых исключений в алгоритмах моделирования механических систем с односторонними связями / Г.Н. Колесников. Петрозаводск: ПетрГУ, 2003.12 с. Деп. в ВИНТИ 21.11.03, № 2028-B2003.
7. Колесников Г.Н. Очередность перехода односторонних связей упругих механических систем в действительное состояние / Тез. докл. XX Междунар. конф. «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Метод граничных и конечных элементов», 24-26 сент. 2003. С-Пб., 2003. С. 101-103.
8. Колесников Г.Н. Интервальная оценка усилий в задаче компьютерного моделирования нагруженного состояния нижней конечности / Тез. докл. X Междунар. конф. по выч. мех. и современным прикладным программным средствам, Переславль-Залесский, 7-12 июня 1999 г. М.: МГИУ, 1999. С. 154-156.
9. Колесников Г.Н. Трехмерная модель скелетно-мышечной системы опорно-двигательного аппарата / Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Пермь, 23-29 авг. 2001 г. // Аннот. докл. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. - С. 344.
10. Колесников Г.Н. Дискретные модели механических и биомеханических систем с односторонними связями / Г.Н. Колесников. Изд-во ПетрГУ. Петрозаводск, 2004. 200 с.
11. Ловцов А.Д. Алгоритмы линейной задачи дополнительной в применении к расчету систем с односторонними связями. / А.Д. Ловцов Тез. докл. XX Междунар. конф. «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Метод граничных и конечных элементов», 24-26 сент. 2003. С-Пб., 2003. С. 128-129.
12. Перельмутер А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. Киев:Изд-во «Сталь», 2002. 600 с.
<http://www.scadgroup.com/>
13. Рабинович И.М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями / И.М. Рабинович. М.: Стройиздат, 1975. 144 с.
14. Ржаницын А.Р. Строительная механика / А.Р. Ржаницын. М.: Высш. школа, 1982. 400 с.
15. Hilding D. A heuristic smoothing procedure for avoiding local optima in optimization of structures subject to unilateral constraints / D. Hilding // Struct. Multidisc. Optim. 2000. Vol. 20. P. 29-36.