Применения единичной системы координат в МНК.

А. Н. Каретин

4 сентября 2010 года*

Аннотация

В учебных материалах и статьях по методу наименьших квадратов (МНК) определяется применение данного метода в виде нахождения неизвестных ($\mathbf{a}$) в зависимости между параметрами ($\mathbf{x}$) и изучаемой величиной ($\mathbf{y}$):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & x_{1_1} & \dots & x_{m_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1_n} & \dots & x_{m_n} \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{T}} \;\rightarrow\; \hat{y}_i = y_i + \varepsilon_i = a_0 + a_1 x_{1_i} + \ldots + a_m x_{m_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_{1_i} + \ldots + a_m x_{m_i} - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$$

Это условие минимизирует ошибку только изучаемой величины. Если же изучаемой величиной являются параметры (причем все), данное условие не подходит.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{T}} = 0 \;\rightarrow\; a_0 + a_1 x_{1_i} + \ldots + a_m x_{m_i} = \varepsilon_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 x_{1_i} + \ldots + a_m x_{m_i}]^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$$

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_m = 0$$

Обнуление всех неизвестных вполне очевидно. Это вызвано тем, что основные статистические характеристики данного условия попадают в область глобального нуля. Для того, чтобы МНК работал при такой постановке задачи, надо перевести параметры из нулевой в единичную систему координат.

В данной статье будет рассмотрен линейный случай применения единичной системы координат для построения системы МНК.

*Typeset by LaTeX

Линейный случай применения единичной системы координат для построения системы МНК.

В качестве наиболее распространённого примера рассмотрим случай нахождения плоскости по набору измеренных координат точек на её поверхности. Для поверхности, существующей на местности, требуется максимально точно определить её положение (3D-ориентирование) с учётом того, что поверхность не идеально гладкая (имеет шероховатости) и результаты измерения точек на ней не являются безошибочными.

В данной задаче в качестве «поверхности» может выступать любой контур сооружения, который можно теоретически рассматривать как «лежащий в одной плоскости». Это может быть фасад здания, прямая секция моста, контур портала, плоскость тоннельного кольца. Характер «неровностей» исследуемой плоскости, исходя из разнообразия исследуемых объектов, не определён. Также не определена погрешность измерений, которая зависит от условий измерений.

Для определения исследуемой плоскости производят ряд измерений точек на её поверхности ($X_i, Y_i, H_i, i = 1 \dots n$) в какой-то системе координат (городской, например). Для построения модели МНК, перейдём от данной системы координат сначала к нулевой, а потом к единичной.

Переход к нулевой системе координат очень прост:

$$\begin{array}{lll} x_i = X_i - \bar{X} & y_i = Y_i - \bar{Y} & h_i = H_i - \bar{H} \\ \bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i & \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i & \bar{H} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} H_i \end{array}$$

Нулевая система координат имеет огромное применение для статистических методов, имеющих конкретную изучаемую величину. Для систем, где все данные являются неточными, эта система координат неприменима из-за наличия глобального нуля.

Для перевода данных из нулевой в единичную систему координат понадобится рад характеристик этих данных (существование которых можно также назвать условием существования единичной системы координат):

1) Дисперсия:

$$D_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2,\ D_Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \bar{Y}^2,\ D_H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_i^2 - \bar{H}^2,$$

$$D = \frac{1}{3}(D_X + D_Y + D_H).$$

2) Вес:

$$P_X = \frac{D}{D_X},\ P_Y = \frac{D}{D_Y},\ P_H = \frac{D}{D_H}.$$

3) Норма веса:

$$p_X = \sqrt{P_X},\ p_Y = \sqrt{P_Y},\ p_H = \sqrt{P_H}.$$

4) Взвешенное смещение:

$$e_X = \sqrt{D} \cdot p_X,\ e_Y = \sqrt{D} \cdot p_Y,\ e_H = \sqrt{D} \cdot p_H.$$

Определив взвешенное смещение каждой координаты, переходим от нулевой к единичной системе координат:

$$\mathbf{x_e} = \mathbf{x} + e_X,\ \mathbf{y_e} = \mathbf{y} + e_Y,\ \mathbf{h_e} = \mathbf{h} + e_H.$$

Для данных в единичной системе координат (если она существует, а для этого должны существовать взвешенные смещения) верно следующее:

1) Статистические характеристики данных располагаются вне области глобального нуля:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{e_i} \neq 0,\ \sum_{i=1}^{n} y_{e_i} \neq 0,\ \sum_{i=1}^{n} h_{e_i} \neq 0.$$

2) Для этих данных всегда существует отличное от нуля решение системы:

$$a\mathbf{x_e} + b\mathbf{y_e} + c\mathbf{h_e} + 1 = \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{n} [\varepsilon_i]^2 \to \min, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0.$$

Решение этой системы минимизирует свою относительную ошибку, что означает свободу её от дисперсий отдельных составляющих её компонентов. Иными словами решение минимизирует ошибку не какого-либо отдельного компонента, а всех компонентов вместе.

Подробнее о системе нормальных уравнений.

Она примет вид:

$$\mathbf{N} \cdot (a, b, c)^T = \mathbf{W} \quad \to \quad \begin{cases} N_{11} \cdot a + N_{12} \cdot b + N_{13} \cdot c = W_1 \\ N_{21} \cdot a + N_{22} \cdot b + N_{23} \cdot c = W_2 \\ N_{31} \cdot a + N_{32} \cdot b + N_{33} \cdot c = W_3 \end{cases}$$

, где

$$\begin{array}{llll} N_{11} = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_e^2) & N_{12} = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_e y_e) & N_{13} = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_e h_e) & W_1 = -\sum\limits_{i=1}^{n}(x_e) \\ N_{21} = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_e y_e) & N_{22} = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_e^2) & N_{23} = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_e h_e) & W_2 = -\sum\limits_{i=1}^{n}(y_e) \\ N_{31} = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_e h_e) & N_{32} = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_e h_e) & N_{33} = \sum\limits_{i=1}^{n}(h_e^2) & W_3 = -\sum\limits_{i=1}^{n}(h_e) \end{array}$$

Решение данной системы может быть легко найдено в любой электронной таблице (OpenOffice.org Calc, например), не говоря уже о таких системах как Maxima, Octave, FreeMat:

$$(a, b, c)^T = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{W}$$

В электронной таблицы OpenOffice.org Calc для этого имеются следующие функции:

-обратная матрица ($\mathbf{N}^{-1}$):

=MINVERSE('Range N'),

-матричное произведение ($\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{W}$):

=MMULT('Range N^{-1}';'Range W').

Где 'Range X' — ссылка на диапазон ячеек, содержащих массив X.

После того, как найдены неизвестные (**a**, **b** и **c**) возможны следующие действия:

1) Переход от единичной системы координат к исходной:

$$\begin{aligned}
&a\ x_e + b\ y_e + c\ h_e + 1 = 0 \\
&a(X - \bar{X} + e_X) + b(Y - \bar{Y} + e_Y) + c(H - \bar{H} + e_H) + 1 = 0 \\
&aX + bY + cH + \left[a(e_X - \bar{X}) + b(e_Y - \bar{Y}) + c(e_H - \bar{H}) + 1\right] = 0
\end{aligned}$$

2) Выражение одной неизвестной через остальные:

$$\begin{aligned}
&aX + bY + cH + \left[a(e_X - \bar{X}) + b(e_Y - \bar{Y}) + c(e_H - \bar{H}) + 1\right] = 0 \\
&H = -a/c\ X - b/c\ Y - 1/c\left[a(e_X - \bar{X}) + b(e_Y - \bar{Y}) + c(e_H - \bar{H}) + 1\right]
\end{aligned}$$

3) Определение расстояния от точек до найденной плоскости:

$$R_i = \frac{a(X_i - \bar{X} + e_X) + b(Y_i - \bar{Y} + e_Y) + c(H_i - \bar{H} + e_H) + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4) Определение ориетнирования плоскости относительно горизонта:

$$b_{xy} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \{\sin(\alpha) = a/b_{xy}, \ \ \cos(\alpha) = b/b_{xy} \ \rightarrow \ \alpha\} \quad i = c/b_{xy} \cdot 1000‰$$

Заключение.

Ознакомление с данным материалом рекомендую проводить совместно с прилагаемыми к нему электронными таблицами. Данный материал может содержать огрехи, так как мной досконально не проверялся. В то же время электронные таблицы выверены до запятой.

«... и не будет после нас тьмы.»
А.Н.Каретин
04.09.2010г.

Made in «Территория без имени»
http://mykaralw.narod.ru/