МНК для аппроксимации данных окружностью.

А. Н. Каретин

4 сентября 2010 года*

Аннотация

В данной статье будет подробно изложен вывод системы уравнений апроксимации данных окружностью, основанный на методе наименьших квадратов (МНК).

Вывод системы уравнений апроксимации данных окружностью, основанный на МНК.

Уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$$

Каноническая форма этого уравнения:

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$$

МНК находит такое приближение к решению данного уравнения, которое минимизирует сумму квадратов ошибок данного уравнения:

$$e(x_i, y_i) = x_i^2 + y_i^2 - 2x_i\hat{x_0} - 2y_i\hat{y_0} + \hat{x_0}^2 + \hat{y_0}^2 - \hat{R}^2 \quad i = 1 \dots n$$

$$\sum_{i=1}^{n} [e(x_i, y_i)]^2 \to \min$$

В этой системе x_i и y_i - апроксимируемые данные, x_0, y_0 и R - искомые параметры аппроксимации, $e(x, y)$ - функция ошибки аппроксимации.

Данное условие имеет только один минимум, который можно найти, приравняв частные производные суммы квадратов функции ошибки от искомых параметров нулю. Найдем эти производные и вынесем все постоянные за знак суммы:

*Typeset by LaTeX

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum [e(x,y)]^2}{\partial x_0} = 2\sum \left[e(x,y) \cdot \frac{\partial e(x,y)}{\partial x_0}\right] = 0 \\ \frac{\partial \sum [e(x,y)]^2}{\partial y_0} = 2\sum \left[e(x,y) \cdot \frac{\partial e(x,y)}{\partial y_0}\right] = 0 \\ \frac{\partial \sum [e(x,y)]^2}{\partial R} = 2\sum \left[e(x,y) \cdot \frac{\partial e(x,y)}{\partial R}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \left[e(x,y) \cdot \frac{\partial e(x,y)}{\partial x_0}\right] = \sum [e(x,y) \cdot (-2x + 2x_0)] = 0 \\ \sum \left[e(x,y) \cdot \frac{\partial e(x,y)}{\partial y_0}\right] = \sum [e(x,y) \cdot (-2y + 2y_0)] = 0 \\ \sum \left[e(x,y) \cdot \frac{\partial e(x,y)}{\partial R}\right] = \sum [e(x,y) \cdot 2R] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum [e(x,y) \cdot (-2x + 2x_0)] = -2(\sum [e(x,y) \cdot x] - \sum [e(x,y) \cdot x_0]) = 0 \\ \sum [e(x,y) \cdot (-2y + 2y_0)] = -2(\sum [e(x,y) \cdot y] - \sum [e(x,y) \cdot y_0]) = 0 \\ \sum [e(x,y) \cdot 2R] = 2R \sum [e(x,y)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum [e(x,y) \cdot x] - \sum [e(x,y) \cdot x_0] = \sum [e(x,y) \cdot x] - x_0 \cdot \sum [e(x,y)] = 0 \\ \sum [e(x,y) \cdot y] - \sum [e(x,y) \cdot y_0] = \sum [e(x,y) \cdot y] - y_0 \cdot \sum [e(x,y)] = 0 \\ \sum [e(x,y)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum [e(x,y) \cdot x] - x_0 \cdot 0 = \sum [e(x,y) \cdot x] = 0 \\ \sum [e(x,y) \cdot y] - y_0 \cdot 0 = \sum [e(x,y) \cdot y] = 0 \\ \sum [e(x,y)] = 0 \end{cases}$$

Даже не раскрывая функцию ошибки, мы сразу получили очень хорошее для нас условие решения данной системы: сумма ошибок (и, соответственно, средняя ошибка) равна 0. Раскроем функцию ошибок и продолжим упрощение системы:

$$\begin{cases} \sum [e(x,y) \cdot x] = \sum \left[x^3 + xy^2 - 2x^2x_0 - 2xyy_0 + xx_0^2 + xy_0^2 - xR^2\right] = 0 \\ \sum [e(x,y) \cdot y] = \sum \left[x^2y + y^3 - 2xyx_0 - 2y^2y_0 + yx_0^2 + yy_0^2 - yR^2\right] = 0 \\ \sum [e(x,y)] = \sum \left[x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2\right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \left[x^3 + xy^2 - 2x^2x_0 - 2xyy_0 + xx_0^2 + xy_0^2 - xR^2\right] = \\ = \sum [x^3] + \sum [xy^2] - 2(x_0 \sum [x^2] + y_0 \sum [xy]) + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) \sum [x] = 0 \\ \\ \sum \left[x^2y + y^3 - 2xyx_0 - 2y^2y_0 + yx_0^2 + yy_0^2 - yR^2\right] = \\ = \sum [x^2y] + \sum [y^3] - 2(x_0 \sum [xy] + y_0 \sum [y^2]) + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) \sum [y] = 0 \\ \\ \sum \left[x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2\right] = \\ = \sum [x^2] + \sum [y^2] - 2(x_0 \sum [x] + y_0 \sum [y]) + n(x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0 \end{cases}$$

Используя третье уравнение перейдем от системы трех уравнений с тремя неизвестными (x_0, y_0, R) к системе двух уравнений с двумя неизвестными (x_0, y_0):

$$\begin{cases} \sum[x^3] + \sum[xy^2] - 2(x_0 \sum[x^2] + y_0 \sum[xy]) + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) \sum[x] = 0 \\ \sum[x^2y] + \sum[y^3] - 2(x_0 \sum[xy] + y_0 \sum[y^2]) + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) \sum[y] = 0 \\ (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = -\frac{1}{n} \left(\sum[x^2] + \sum[y^2] - 2(x_0 \sum[x] + y_0 \sum[y])\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum[x^3] + \sum[xy^2] - 2(x_0 \sum[x^2] + y_0 \sum[xy]) - \\ -\frac{1}{n} \left(\sum[x^2] + \sum[y^2] - 2(x_0 \sum[x] + y_0 \sum[y])\right) \sum[x] = 0 \\ \\ \sum[x^2y] + \sum[y^3] - 2(x_0 \sum[xy] + y_0 \sum[y^2]) - \\ -\frac{1}{n} \left(\sum[x^2] + \sum[y^2] - 2(x_0 \sum[x] + y_0 \sum[y])\right) \sum[y] = 0 \\ \\ (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = -\frac{1}{n} \left(\sum[x^2] + \sum[y^2] - 2(x_0 \sum[x] + y_0 \sum[y])\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sum[x^3] + \sum[xy^2] - \frac{1}{n} \sum[x^2] \sum[x] - \frac{1}{n} \sum[y^2] \sum[x]) - \\ -2x_0(\sum[x^2] - \frac{1}{n} \sum[x] \sum[x]) - 2y_0(\sum[xy] - \frac{1}{n} \sum[x] \sum[y]) = 0 \\ \\ (\sum[x^2y] + \sum[y^3] - \frac{1}{n} \sum[x^2] \sum[y] - \frac{1}{n} \sum[y^2] \sum[y]) - \\ -2x_0(\sum[xy] - \frac{1}{n} \sum[x] \sum[y]) - 2y_0(\sum[y^2] - \frac{1}{n} \sum[y] \sum[y]) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_0(\sum[x^2] - \frac{1}{n} \sum[x] \sum[x]) + 2y_0(\sum[xy] - \frac{1}{n} \sum[x] \sum[y]) = \\ = (\sum[x^3] + \sum[xy^2] - \frac{1}{n} \sum[x^2] \sum[x] - \frac{1}{n} \sum[y^2] \sum[x]) \\ \\ 2x_0(\sum[xy] - \frac{1}{n} \sum[x] \sum[y]) + 2y_0(\sum[y^2] - \frac{1}{n} \sum[y] \sum[y]) = \\ (\sum[x^2y] + \sum[y^3] - \frac{1}{n} \sum[x^2] \sum[y] - \frac{1}{n} \sum[y^2] \sum[y]) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{11}x_0 + N_{12}y_0 = W_1 \\ N_{21}x_0 + N_{22}y_0 = W_2 \end{cases}$$

$$N_{11} = 2(\sum[x^2] - \frac{1}{n} \sum[x] \sum[x]) \quad N_{12} = 2(\sum[xy] - \frac{1}{n} \sum[x] \sum[y])$$
$$W_1 = (\sum[x^3] + \sum[xy^2] - \frac{1}{n} \sum[x^2] \sum[x] - \frac{1}{n} \sum[y^2] \sum[x])$$

$$N_{21} = 2(\sum[xy] - \frac{1}{n} \sum[x] \sum[y]) \quad N_{22} = 2(\sum[y^2] - \frac{1}{n} \sum[y] \sum[y])$$
$$W_2 = (\sum[x^2y] + \sum[y^3] - \frac{1}{n} \sum[x^2] \sum[y] - \frac{1}{n} \sum[y^2] \sum[y])$$

Далее оперировать с громоздкими выражениями нет смысла. Следует найти числовые значения N и W, а дальше использовать простое решение системы из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\det(N) = N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21}$$
$$x0 = (W_1N_{22} - W_2N_{12}) / \det(N)$$
$$y0 = (W_2N_{11} - W_1N_{21}) / \det(N)$$

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 + \frac{1}{n} \left(\sum[x^2] + \sum[y^2] - 2(x_0 \sum[x] + y_0 \sum[y])\right)$$

Заключение.

Ознакомление с данным материалом рекомендую проводить совместно с основной статьей "Особенности применения МНК при определении геометрии тоннельных колец"и прилагаемыми к ней электронными таблицами. Данный материал может содержать огрехи, так как мной досконально не проверялся. В то же время электронные таблицы выверены до запятой.

«... и не будет после нас тьмы.»
А.Н.Каретин
04.09.2010г.

Made in «Территория без имени»
http://mykaralw.narod.ru/