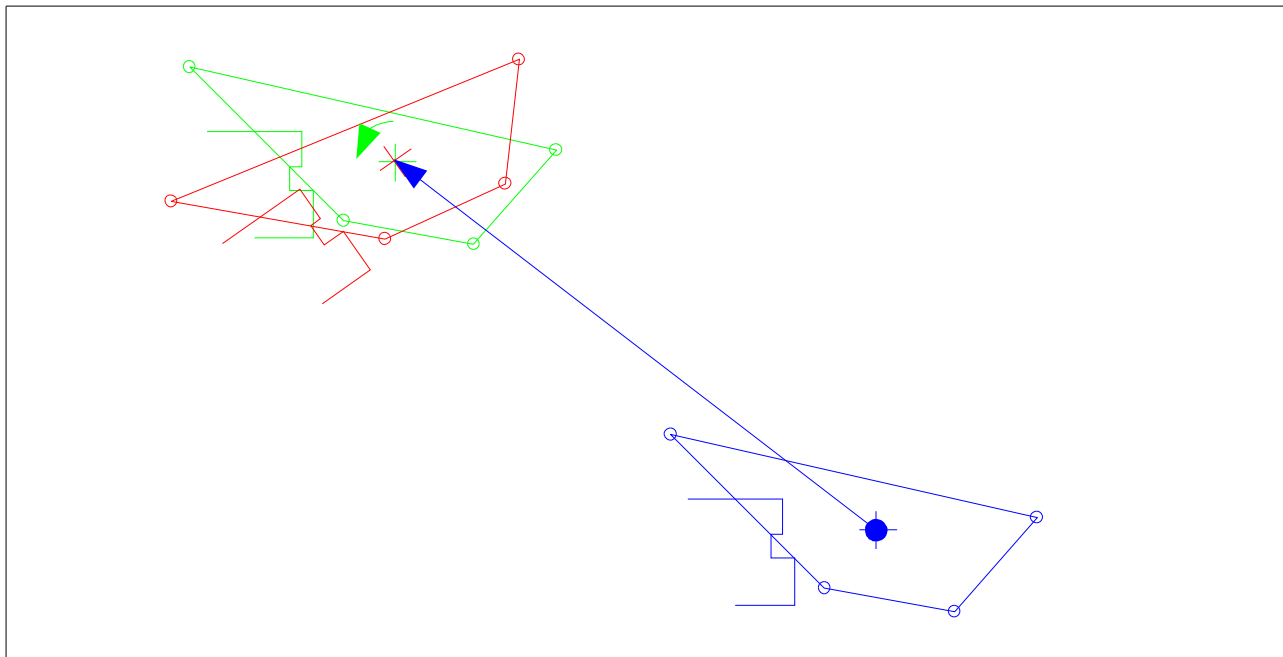


Применение Метода Наименьших Квадратов для перехода из одной системы координат в другую.



Общие сведения.

На местности существуют исходные точки, имеющие координаты в общей системе координат (General coordinate system). По некоторым причинам эти координаты в данный момент недоступны, либо их использование не является целесообразным (сложны условия наблюдения: невозможно установить прибор над пунктом из-за расположенного над ним оборудования; невозможно ориентирование прибора из-за техногенных преград; невозможно осуществить приемлемую обратную засечку из-за близости прибора к описываемой исходные пункты окружности;...). В силу этого, съемку определяемых контуров производят в условной системе координат (Local coordinate system), имеющей свою нулевую точку и свое нулевое направление, отличные от этих же элементов в общей системе координат. По ходу съемки, наблюдаются так же и исходные пункты («подхватываются») в условной же системе. При этом, по окончании работ надо предоставить определяемые контуры в общей системе координат. Данную задачу можно разбить на два этапа:

- 1) определение сдвига одной системы координат относительно другой;
- 2) определение разворота одной системы координат относительно другой.

Выполнить данную задачу надо используя точки, имеющие координаты и в одной, и в другой системе. Оба этапа задачи хочется сделать достаточно простым и надежным, сводя к минимуму возможность допущения ошибки.

1ый этап. Сдвиг.

Для того, чтобы было удобно не только осуществить сдвиг, но и разворот, лучше всего от обеих систем перейти к некоторым системам с общей нулевой точкой (относительно которой в дальнейшем будет осуществлен разворот). В качестве такой нулевой точки предлагаю выбрать среднее значение координат точек, имеющих в обеих системах. Эти точки еще называют центрами масс и их очень часто применяют в статистических методах для нахождения зависимостей различных величин. Приводить основания для выбора данных точек в этой статье нет причин. Несогласный с данным выбором может использовать иные нулевые точки, алгоритм обработки от этого вряд ли изменится:

$$\bar{X}_L = \frac{1}{N} \sum X_L, \bar{Y}_L = \frac{1}{N} \sum Y_L$$
$$\bar{X}_G = \frac{1}{N} \sum X_G, \bar{Y}_G = \frac{1}{N} \sum Y_G$$

$$X_{L0} = X_L - \bar{X}_L, Y_{L0} = Y_L - \bar{Y}_L$$
$$X_{G0} = X_G - \bar{X}_G, Y_{G0} = Y_G - \bar{Y}_G$$

Для возврата обратно к исходным координатам достаточно прибавить к данным «обнуленным» координатам значения координат «центров масс»:

$$X_L = X_{L0} + \bar{X}_L, Y_L = Y_{L0} + \bar{Y}_L$$
$$X_G = X_{G0} + \bar{X}_G, Y_G = Y_{G0} + \bar{Y}_G$$

Именно такой простой переход и требовался.

2ой этап. Разворот.

Для простоты разворота используем «обнуленные» координаты. В этом случае разворот достаточно прост, что нам и нужно:

$$\begin{bmatrix} X_{G0} \\ Y_{G0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{L0} \\ Y_{L0} \end{bmatrix} = \begin{cases} X_{L0} \cdot \cos(\phi) + Y_{L0} \cdot \sin(\phi) \\ -X_{L0} \cdot \sin(\phi) + Y_{L0} \cdot \cos(\phi) \end{cases}$$

где  $\phi$  - угол поворота местной системы координат относительно общей.

Компоненты разворота  $\cos(\phi)$  и  $\sin(\phi)$  связаны между собой строгой зависимостью:

$$\sqrt{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)} = 1$$

Эта зависимость может серьезно усложнить нахождение элементов поворота, поэтому применим не чистую матрицу разворота, а матрицу разворота с масштабированием:

$$mc = m \cdot \cos(\phi), ms = m \cdot \sin(\phi)$$
$$\begin{bmatrix} X_{G0} \\ Y_{G0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mc & ms \\ -ms & mc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{L0} \\ Y_{L0} \end{bmatrix} = \begin{cases} X_{L0} \cdot mc + Y_{L0} \cdot ms \\ -X_{L0} \cdot ms + Y_{L0} \cdot mc \end{cases}$$
$$\sqrt{mc^2 + ms^2} = m, \cos(\phi) = \frac{mc}{m}, \sin(\phi) = \frac{ms}{m}, \phi = \text{atan2}(\cos(\phi), \sin(\phi))$$

где  $m$  - масштабный коэффициент близкий к 1.

Для определения элементов  $mc$  и  $ms$  используем МНК.

Применение МНК для определения элементов разворота.

В качестве критерия МНК в данной задаче выступают разности координат общей системы и вычисленных по местным значениям координат:

$$\begin{aligned}\Delta X &= X_{G0} - f_{x_{LG}}(X_{L0}, Y_{L0}) = X_{G0} - X_{L0} \cdot mc - Y_{L0} \cdot ms \\ \Delta Y &= Y_{G0} - f_{y_{LG}}(X_{L0}, Y_{L0}) = Y_{G0} + X_{L0} \cdot ms - Y_{L0} \cdot mc \\ J(\Delta) &= \sum [\Delta X^2 + \Delta Y^2] \rightarrow \min\end{aligned}$$

Данный критерий будет соблюден, когда его частные производные по неизвестным (  $mc$  и  $ms$  ) обратятся в 0:

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{\partial J(\Delta)}{\partial mc} = \sum \left[ \frac{\partial \Delta X^2}{\partial mc} + \frac{\partial \Delta Y^2}{\partial mc} \right] = 0 \\ \frac{\partial J(\Delta)}{\partial ms} = \sum \left[ \frac{\partial \Delta X^2}{\partial ms} + \frac{\partial \Delta Y^2}{\partial ms} \right] = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\partial J(\Delta)}{\partial mc} = \sum \left[ 2 \Delta X \frac{\partial \Delta X}{\partial mc} + 2 \Delta Y \frac{\partial \Delta Y}{\partial mc} \right] = 0 \\ \frac{\partial J(\Delta)}{\partial ms} = \sum \left[ 2 \Delta X \frac{\partial \Delta X}{\partial ms} + 2 \Delta Y \frac{\partial \Delta Y}{\partial ms} \right] = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\partial J(\Delta)}{\partial mc} = \sum [2 \Delta X (-X_{L0}) + 2 \Delta Y (-Y_{L0})] = 0 \\ \frac{\partial J(\Delta)}{\partial ms} = \sum [2 \Delta X (-Y_{L0}) + 2 \Delta Y (X_{L0})] = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\partial J(\Delta)}{\partial mc} = -2 \sum [(X_{G0} X_{L0} - mc \cdot X_{L0}^2 - ms \cdot X_{L0} Y_{L0}) + (Y_{G0} Y_{L0} + ms \cdot X_{L0} Y_{L0} - mc \cdot Y_{L0}^2)] = 0 \\ \frac{\partial J(\Delta)}{\partial ms} = -2 \sum [(X_{G0} Y_{L0} - mc \cdot X_{L0} Y_{L0} - ms \cdot Y_{L0}^2) - (Y_{G0} X_{L0} + ms \cdot X_{L0}^2 - mc \cdot X_{L0} Y_{L0})] = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} mc \cdot (\sum [X_{L0}^2] + \sum [Y_{L0}^2]) = (\sum [X_{G0} X_{L0}] + \sum [Y_{G0} Y_{L0}]) \\ ms \cdot (\sum [X_{L0}^2] + \sum [Y_{L0}^2]) = (\sum [X_{G0} Y_{L0}] - \sum [Y_{G0} X_{L0}]) \end{cases}\end{aligned}$$

Из последнего выражения легко и надежно определяются неизвестные (  $mc$  и  $ms$  ).

$$\begin{cases} mc = (\sum [X_{G0} X_{L0}] + \sum [Y_{G0} Y_{L0}]) / (\sum [X_{L0}^2] + \sum [Y_{L0}^2]) \\ ms = (\sum [X_{G0} Y_{L0}] - \sum [Y_{G0} X_{L0}]) / (\sum [X_{L0}^2] + \sum [Y_{L0}^2]) \end{cases}$$

Определение координат контура в общей системе координат.

После нахождения элементов поворота (  $mc$  и  $ms$  ) координаты точек контура рассчитываются по приведенным выше формулам:

$$\begin{bmatrix} X_{G0}^K \\ Y_{G0}^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mc & ms \\ -ms & mc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{L0}^K \\ Y_{L0}^K \end{bmatrix} = \begin{cases} X_{L0}^K \cdot mc + Y_{L0}^K \cdot ms \\ -X_{L0}^K \cdot ms + Y_{L0}^K \cdot mc \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_G^K = X_{G0}^K + \bar{X}_G \\ Y_G^K = Y_{G0}^K + \bar{Y}_G \end{cases}$$

Вот собственно и все. Достаточно просто и в то же время надежно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

К данной статье прилагается электронная таблица. Все неясные моменты выверяйте в ней.

“И не будет после нас тьмы...”

А.Н.Каретин.

27 декабря 2010г.