Определение координат контура в общей системе координат.

После нахождения элементов поворота (mc и ms) координаты точек контура расчитываются по приведенным выше формулам:

$$\begin{bmatrix} X^K_{G0} \\ Y^K_{G0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mc & ms \\ -ms & mc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^K_{L0} \\ Y^K_{L0} \end{bmatrix} = \begin{cases} X^K_{L0}\cdot mc + Y^K_{L0}\cdot ms \\ -X^K_{L0}\cdot ms + Y^K_{L0}\cdot mc \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^K_G = X^K_{G0} + \bar{X}_G \\ Y^K_G = Y^K_{G0} + \bar{Y}_G \end{cases}$$

Вот собственно и все. Достаточно просто и в то же время надежно.

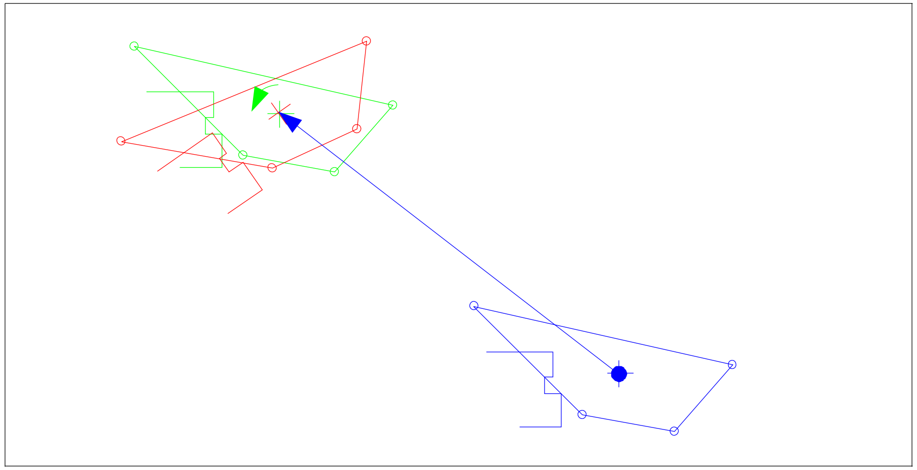
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

К данной статье прилагается электронная таблица. Все неясные моменты выверяйте в ней.

“И не будет после нас тьмы...”
А.Н.Каретин.
27 декабря 2010г.

А.Н.Каретин. 2010г.

Применение Метода Наименьших Квадратов для перехода из одной системы координат в другую.



Общие сведения.

На местности существуют исходные точки, имеющие координаты в общей системе координат (General coordinate system). По некоторым причинам эти координаты в данный момент недоступны, либо их использование не является целесообразным (сложны условия наблюдения: невозможно установить прибор над пунктом из-за расположенного над ним оборудования; невозможно ориентирование прибора из-за техногенных преград; невозможно осуществить приемлемую обратную засечку из-за близости прибора к описывающей исходные пункты окружности;...). В силу этого, съемку определяемых контуров производят в условной системе координат (Local coordinate system), имеющей свою нулевую точку и свое нулевое направление, отличные от этих же элементов в общей системы координат. По ходу съемки, наблюдаются так же и исходные пункты («подхватываются») в условной же системе. При этом, по окончанию работ надо предоставить определяемые контуры в общей системе координат. Данную задачу можно разбить на два этапа:

1) определение сдвига одной системы координат относительно другой;
2) определениение разворота одной системы координат относительно другой.

Выполнить данную задачу надо используя точки, имеющие координаты и в одной, и в другой системе. Оба этапа задачи хочется сделать достаточно простым и надежным, сводя к минимуму возможность допущения ошибки.

1ый этап. Сдвиг.

Для того, чтобы было удобно не только осуществить сдвиг, но и разворот, лучше всего от обеих систем перейти к некоторым системам с общей нулевой точкой (относительно которой в дальнейшем будет осуществлен разворот). В качестве такой нулевой точки предлагаю выбрать среднее значение координат точек, имеющихся в обоих системах. Эти точки еще называют центрами масс и их очень часто применяют в статистических методах для нахождения зависимостей различных величин. Приводить основания для выбора данных точек в этой статье нет причин. Несогласный с данным выбором может использовать иные нулевые точки, алгоритм обработки от этого вряд ли изменится:

$$\bar{X}_L=\frac{1}{N}\sum X_L,\ \bar{Y}_L=\frac{1}{N}\sum Y_L$$

$$\bar{X}_G=\frac{1}{N}\sum X_G,\ \bar{Y}_G=\frac{1}{N}\sum Y_G$$

$$X_{L0}=X_L-\bar{X}_L,\ Y_{L0}=Y_L-\bar{Y}_L$$
$$X_{G0}=X_G-\bar{X}_G,\ Y_{G0}=Y_G-\bar{Y}_G$$

Для возврата обратно к исходным координатам достаточно прибавить к данным «обнуленным» координатам значения координат «центров масс»:

$$X_L=X_{L0}+\bar{X}_L,\ Y_L=Y_{L0}+\bar{Y}_L$$
$$X_G=X_{G0}+\bar{X}_G,\ Y_G=Y_{G0}+\bar{Y}_G$$

Именно такой простой переход и требовался.

2ой этап. Разворот.

Для простоты разворота используем «обнуленные» координаты. В этом случае разворот достаточно прост, что нам и нужно:

$$\begin{bmatrix}X_{G0}\\Y_{G0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi)\\-\sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{L0}\\Y_{L0}\end{bmatrix}=\begin{cases}X_{L0}\cdot\cos(\phi)+Y_{L0}\cdot\sin(\phi)\\-X_{L0}\cdot\sin(\phi)+Y_{L0}\cdot\cos(\phi)\end{cases}$$

где ϕ – угол поворота местной системы координат относительно общей.

Компоненты разворота $\cos(\phi)$ и $\sin(\phi)$ связаны между собой строгой зависимостью:

$$\sqrt{\cos(\phi)^2+\sin(\phi)^2}=1$$

Эта зависимость может серьезно усложнить нахождение элементов поворота, поэтому применим не чистую матрицу разворота, а матрицу разворота с масштабированием:

$$mc=m\cdot\cos(\phi),\ ms=m\cdot\sin(\phi)$$

$$\begin{bmatrix}X_{G0}\\Y_{G0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}mc & ms\\-ms & mc\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{L0}\\Y_{L0}\end{bmatrix}=\begin{cases}X_{L0}\cdot mc+Y_{L0}\cdot ms\\-X_{L0}\cdot ms+Y_{L0}\cdot mc\end{cases}$$

$$\sqrt{mc^2+ms^2}=m,\ \cos(\phi)=\frac{mc}{m},\ \sin(\phi)=\frac{ms}{m},\ \phi=atan2(\cos(\phi),\sin(\phi))$$

где m – масштабный коэффициет близкий к 1.

Для определения элементов mc и ms используем МНК.

Применение МНК для определения элементов разворота.

В качестве критерия МНК в данной задаче выступят разности координат общей системы и вычисленных по местным значениям координат:

$$\Delta X=X_{G0}-fx_{LG}(X_{L0},Y_{L0})=X_{G0}-X_{L0}\cdot mc-Y_{L0}\cdot ms$$
$$\Delta Y=Y_{G0}-fy_{LG}(X_{L0},Y_{L0})=Y_{G0}+X_{L0}\cdot ms-Y_{L0}\cdot mc$$
$$J(\Delta)=\sum\left[\Delta X^2+\Delta Y^2\right]\rightarrow min$$

Данный критерий будет соблюден, когда его частные производные по неизвестным (mc и ms) обратятся в 0:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J(\Delta)}{\partial mc}=\sum\left[\dfrac{\partial\Delta X^2}{\partial mc}+\dfrac{\partial\Delta Y^2}{\partial mc}\right]=0\\[2ex]\dfrac{\partial J(\Delta)}{\partial ms}=\sum\left[\dfrac{\partial\Delta X^2}{\partial ms}+\dfrac{\partial\Delta Y^2}{\partial ms}\right]=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J(\Delta)}{\partial mc}=\sum\left[2\Delta X\dfrac{\partial\Delta X}{\partial mc}+2\Delta Y\dfrac{\partial\Delta Y}{\partial mc}\right]=0\\[2ex]\dfrac{\partial J(\Delta)}{\partial ms}=\sum\left[2\Delta X\dfrac{\partial\Delta X}{\partial ms}+2\Delta Y\dfrac{\partial\Delta Y}{\partial ms}\right]=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J(\Delta)}{\partial mc}=\sum\left[2\Delta X(-X_{L0})+2\Delta Y(-Y_{L0})\right]=0\\[2ex]\dfrac{\partial J(\Delta)}{\partial ms}=\sum\left[2\Delta X(-Y_{L0})+2\Delta Y(X_{L0})\right]=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J(\Delta)}{\partial mc}=-2\sum\left[(X_{G0}X_{L0}-mc\cdot X_{L0}^2-ms\cdot X_{L0}Y_{L0})+(Y_{G0}Y_{L0}+ms\cdot X_{L0}Y_{L0}-mc\cdot Y_{L0}^2)\right]=0\\[2ex]\dfrac{\partial J(\Delta)}{\partial ms}=-2\sum\left[(X_{G0}Y_{L0}-mc\cdot X_{L0}Y_{L0}-ms\cdot Y_{L0}^2)-(Y_{G0}X_{L0}+ms\cdot X_{L0}^2-mc\cdot X_{L0}Y_{L0})\right]=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}mc\cdot\left(\sum[X_{L0}^2]+\sum[Y_{L0}^2]\right)=\left(\sum[X_{G0}X_{L0}]+\sum[Y_{G0}Y_{L0}]\right)\\ms\cdot\left(\sum[X_{L0}^2]+\sum[Y_{L0}^2]\right)=\left(\sum[X_{G0}Y_{L0}]-\sum[Y_{G0}X_{L0}]\right)\end{cases}$$

Из последнего выражения легко и надежно определяются неизвестные (mc и ms).

$$\begin{cases}mc=\left(\sum[X_{G0}X_{L0}]+\sum[Y_{G0}Y_{L0}]\right)/\left(\sum[X_{L0}^2]+\sum[Y_{L0}^2]\right)\\ms=\left(\sum[X_{G0}Y_{L0}]-\sum[Y_{G0}X_{L0}]\right)/\left(\sum[X_{L0}^2]+\sum[Y_{L0}^2]\right)\end{cases}$$