



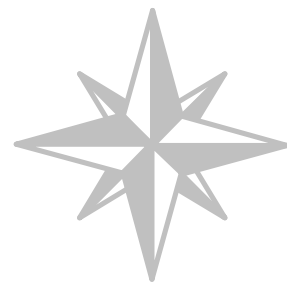
Заключение

Описанные выше методы позволяют, практически не прибегая к тригонометрическим вычислениям, а лишь определяя синусные и косинусные компоненты из линейных величин, создать надежный и достаточно оптимизированный алгоритм для перехода из системы (Y-X)-координат к системе (ПК-delta) и обратно.

Возможность применения электронных таблиц для вычислений позволяет обрабатывать сразу тысячи точек. Иными словами, одна небольшая электронная таблица может содержать в себе целый проект тоннеля.

© "Территория без имени".

А.Н.Каретин.
Оптимальный алгоритм расчета
пикетажа и смещения точки
на прямой и круговой кривой.



Введение

Данная работа предназначена для маркшейдеров, занимающихся проходкой тоннелей.

В данной работе описываются оптимальные методы для перехода из системы (Y-X)-координат к системе (ПК-delta) и обратно на прямых и круговых участках трассы.

Описанные ниже методы ориентированны на применение электронных таблиц.

Эти методы являются хорошим подспорьем маркшейдеру, как для обработки результатов измерений, так и для проверки проектных данных.



Прямая.

1) Задается прямая.

Задаются параметры прямой:

$$ПК_{нп}, Y_{нп}, X_{нп}, ПК_{кп}, Y_{кп}, X_{кп}.$$

Определяется разность пикетов и направление пикетажа:

$$dPK = ПК_{кп} - ПК_{нп}, \quad dirPK = dPK / |dPK|.$$

Определяется длина по координатам:

$$dY = Y_{кп} - Y_{нп}, \quad dX = X_{кп} - X_{нп}, \quad L = (dY^2 + dX^2)^{1/2}.$$

Проверяется соблюдение масштаба и масштабный коэффициент:

$$dL = L - |dPK|, \quad kM = |dPK| / L.$$

Определяется синус и косинус дирекционного угла прямой:

$$\sin(a) = dY / dL, \quad \cos(a) = dX / dL.$$

Определяется изменение знака синуса и косинуса при повороте на 90 градусов:

$$\text{sign}(\sin(a+90)) = -(\sin(a) * \cos(a)) / |\sin(a) * \cos(a)|,$$

$$\text{sign}(\cos(a+90)) = (\sin(a) * \cos(a)) / |\sin(a) * \cos(a)|.$$

Определяется синус и косинус дирекционного угла + 90 градусов:

$$\sin(a+90) = \cos(a) * \text{sign}(\sin(a+90)) * dirPK,$$

$$\cos(a+90) = \sin(a) * \text{sign}(\cos(a+90)) * dirPK$$

2) Определение пикетажа и смещения по координатам.

Задаются (либо определяются в натуре) координаты знака:

$$Y_{пз}, X_{пз}.$$

Определяется разность пикетажа от начала прямой, пикетаж и смещение:

$$dPK_{пз} = (Y_{пз} - Y_{нп}) * \sin(a) + (X_{пз} - X_{нп}) * \cos(a) * kM * dirPK,$$

$$ПК_{пз} = ПК_{нп} + dPK_{пз},$$

$$\delta_{пз} = (Y_{пз} - Y_{нп}) * \cos(a) - (X_{пз} - X_{нп}) * \sin(a) * dirPK.$$

3) Определение координат по пикетажу и смещению.

Задаются пикетаж и смещение проектной точки:

$$ПК_{пт}, \delta_{пт}.$$

Вычисляется изменение пикетажа относительно начала прямой и проложение по линии:

$$dPK_{пт} = (ПК_{пт} - ПК_{нп}) * dirPK, \quad dL_{пт} = dPK_{пт} / kM.$$

Определяются координаты пикетажной точки на линии:

$$Y_{0пт} = Y_{нп} + dL_{пт} * \sin(a), \quad X_{0пт} = X_{нп} + dL_{пт} * \cos(a)$$

Определяются координаты проектной точки:

$$Y_{пт} = Y_{0пт} + \delta_{пт} * \sin(a+90), \quad X_{пт} = X_{0пт} + \delta_{пт} * \cos(a+90)$$

Определяются синусные и косинусные компоненты дирекционных углов на центр круговой кривой:

$$\sin(a1+90)=\text{sign}(\text{deltaцк})*\cos(a1), \cos(a1+90)=-\text{sign}(\text{deltaцк})*\sin(a1), \\ \sin(a2+90)=\text{sign}(\text{deltaцк})*\cos(a2), \cos(a2+90)=-\text{sign}(\text{deltaцк})*\sin(a2).$$

Определяется центр круговой кривой:

$$Y_{цк}=(Y_{нк}*\cos(a1+90)*\sin(a2+90)-Y_{кк}*\sin(a1+90)*\cos(a2+90)+(X_{кк}-X_{нк})*\sin(a1+90)*\sin(a2+90))/(\cos(a1+90)*\sin(a2+90)-\sin(a1+90)*\cos(a2+90)), \\ X_{цк}=(Y_{нк}-Y_{кк})*\cos(a1+90)*\cos(a2+90)-X_{нк}*\sin(a1+90)*\cos(a2+90)+X_{кк}*\cos(a1+90)*\sin(a2+90)/(\cos(a1+90)*\sin(a2+90)-\sin(a1+90)*\cos(a2+90)).$$

Определяются разности координат точек круговой кривой и ее центра:

$$dY_{нк}=Y_{нк}-Y_{цк}, dX_{нк}=X_{нк}-X_{цк}, \\ dY_{кк}=Y_{кк}-Y_{цк}, dX_{кк}=X_{кк}-X_{цк}.$$

Определение радиуса круговой кривой с проверкой:

$$R_{нк}=(dY_{нк}^2+dX_{нк}^2)^{(1/2)}, \\ R_{кк}=(dY_{кк}^2+dX_{кк}^2)^{(1/2)}, \\ (R_{нк}=R_{кк})?, \\ R=(R_{нк}+R_{кк})/2.$$

Определяются синусные и косинусные компоненты дирекционных углов радиусов:

$$\sin(анк)=dY_{нк}/R_{нк}, \cos(анк)=dX_{нк}/R_{нк}, \\ \sin(акк)=dY_{кк}/R_{кк}, \cos(акк)=dX_{кк}/R_{кк}.$$

Определяется угол поворота в радианах:

$$d(\sin(ац))=\sin(акк)-\sin(анк), d(\cos(ац))=\cos(акк)-\cos(анк), \\ l'=(d(\sin(ац))^2+d(\cos(ац))^2)^{(1/2)}, \\ b'=(1-(l'/2)^2)^{(1/2)}, \\ tg(B/2)=l'/(2*b'), \\ B=2*arctg(l'/(2*b')).$$

Определяется длина и тангенс круговой кривой:

$$L=R*B, T=R*tg(B/2).$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(B/2) &= l' / (2 * b'), \\ B &= 2 * \operatorname{arctg}(l' / (2 * b')). \end{aligned}$$

Определяется длина и тангенс круговой кривой:

$$L = R * B, \quad T = R * \operatorname{tg}(B/2).$$

Определяются синусные и косинусные компоненты дирекционных углов прямых от вершины угла поворота:

$$\begin{aligned} dY1 &= Y_{нп1} - Y_{ву}, \quad dX1 = X_{нп1} - X_{ву}, \quad L1 = (dY1^2 + dX1^2)^{(1/2)}, \\ dY2 &= Y_{кп2} - Y_{ву}, \quad dX2 = X_{кп2} - X_{ву}, \quad L2 = (dY2^2 + dX2^2)^{(1/2)}, \\ \sin(a1_{ву}) &= dY1/L1, \quad \cos(a1_{ву}) = dX1/L1, \\ \sin(a2_{ву}) &= dY2/L2, \quad \cos(a2_{ву}) = dX2/L2. \end{aligned}$$

Определяются начало и конец круговой кривой:

$$\begin{aligned} Y_{нк} &= Y_{ву} + T * \sin(a1_{ву}), \quad X_{нк} = X_{ву} + T * \cos(a1_{ву}), \\ Y_{кк} &= Y_{ву} + T * \sin(a2_{ву}), \quad X_{кк} = X_{ву} + T * \cos(a2_{ву}). \end{aligned}$$

Определяются синусные и косинусные компоненты дирекционного угла биссектрисы угла поворота:

$$\begin{aligned} \sin'(aб) &= (\sin(a1_{ву}) + \sin(a2_{ву})) / 2, \quad \cos'(aб) = (\cos(a1_{ву}) + \cos(a2_{ву})) / 2, \\ b' &= (\sin'(aб)^2 + \cos'(aб)^2)^{(1/2)}, \\ \sin(aб) &= \sin'(aб) / b', \quad \cos(aб) = \cos'(aб) / b'. \end{aligned}$$

Определяется смещение от прямых на биссектрисе угла поворота:

$$\delta = (R^2 + T^2)^{(1/2)} - R.$$

Определяется медиана кривой:

$$Y_{ск} = Y_{ву} + \delta * \sin(aб), \quad X_{ск} = X_{ву} + \delta * \cos(aб).$$

Определяется центр кривой:

$$Y_{цк} = Y_{ск} + R * \sin(aб), \quad X_{цк} = X_{ск} + R * \cos(aб).$$

6) Контроль элементов круговой кривой, заданной началом и концом кривой и точками на прилегающих прямых.

Заданы точки на двух прямых, начало и конец кривой:

$$Y_{тп1}, X_{тп1}, Y_{нк}, X_{нк}, Y_{кк}, X_{кк}, Y_{тп2}, X_{тп2}.$$

Определяются координатные разности и длины для точек прямых:

$$\begin{aligned} dY_{п1} &= Y_{нк} - Y_{тп1}, \quad dX_{п1} = X_{нк} - X_{тп1}, \quad L_{п1} = (dY_{п1}^2 + dX_{п1}^2)^{(1/2)}, \\ dY_{п2} &= Y_{тп2} - Y_{кк}, \quad dX_{п2} = X_{тп2} - X_{кк}, \quad L_{п2} = (dY_{п2}^2 + dX_{п2}^2)^{(1/2)}. \end{aligned}$$

Определяются синусные и косинусные компоненты дирекционных углов прямых:

$$\begin{aligned} \sin(a1) &= dY_{п1}/L_{п1}, \quad \cos(a1) = dX_{п1}/L_{п1}, \\ \sin(a2) &= dY_{п2}/L_{п2}, \quad \cos(a2) = dX_{п2}/L_{п2}. \end{aligned}$$

Определяется вершина поворота (пересечение прямых):

$$\begin{aligned} Y_{ву} &= (Y_{нк} * \cos(a1) * \sin(a2) - Y_{тп1} * \sin(a1) * \cos(a2) + (X_{кк} - \\ &X_{нк}) * \sin(a1) * \sin(a2)) / (\cos(a1) * \sin(a2) - \sin(a1) * \cos(a2)), \\ X_{ву} &= ((Y_{нк} - Y_{кк}) * \cos(a1) * \cos(a2) - \\ &X_{нк} * \sin(a1) * \cos(a2) + X_{кк} * \cos(a1) * \sin(a2)) / (\cos(a1) * \sin(a2) - \sin(a1) * \cos(a2)). \end{aligned}$$

Определяется взаимное смещение точек относительно прямых:

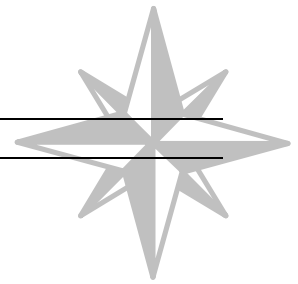
$$\begin{aligned} \delta_{такк} &= (Y_{кк} - Y_{нк}) * \cos(a1) - (X_{кк} - X_{нк}) * \sin(a1), \\ \delta_{тап2} &= (Y_{тп2} - Y_{нк}) * \cos(a1) - (X_{тп2} - X_{нк}) * \sin(a1), \\ \delta_{тап1} &= (Y_{тп1} - Y_{кк}) * \cos(a2) - (X_{тп1} - X_{кк}) * \sin(a2), \\ \delta_{танк} &= (Y_{нк} - Y_{кк}) * \cos(a2) - (X_{нк} - X_{кк}) * \sin(a2). \end{aligned}$$

Проверяется непересечение прямых:

$$\begin{aligned} (\delta_{такк} * \delta_{тап2}) / |\delta_{такк} * \delta_{тап2}| &> 0, \\ (\delta_{тап1} * \delta_{танк}) / |\delta_{тап1} * \delta_{танк}| &> 0. \end{aligned}$$

Определяется направление смещения центра круговой кривой относительно начала кривой:

$$\operatorname{sign}(\delta_{ацк}) = \delta_{танк} / |\delta_{танк}|.$$



1) Задаётся круговая кривая.

Задаются элементы круговой кривой:

$ПК_{нк}, Y_{нк}, X_{нк}, ПК_{кк}, Y_{кк}, X_{кк}, Y_{цк}, X_{цк}.$

Определяются радиусы для заданных элементов:

$dY_{нк} = Y_{нк} - Y_{цк}, dX_{нк} = X_{нк} - X_{цк},$

$dY_{кк} = Y_{кк} - Y_{цк}, dX_{кк} = X_{кк} - X_{цк},$

$R_{нк} = (dY_{нк}^2 + dX_{нк}^2)^{1/2},$

$R_{кк} = (dY_{кк}^2 + dX_{кк}^2)^{1/2},$

$(R_{нк} == R_{кк})?,$

$R = (R_{нк} + R_{кк}) / 2.$

Определяется разность пикетов и направление пикетажа:

$dPK = PK_{кк} - PK_{нк}, dirPK = dPK / |dPK|.$

Определяются синусы и косинусы дирекционных углов радиусов круговой кривой:

$\sin(a)_{нк} = dY_{нк} / R_{нк}, \cos(a)_{нк} = dX_{нк} / R_{нк},$

$\sin(a)_{кк} = dY_{кк} / R_{кк}, \cos(a)_{кк} = dX_{кк} / R_{кк}.$

Определяется положение центра относительно начала и конца кривой:

$\Delta_{цк} = dY_{кк} \cdot \cos(a)_{нк} - dX_{кк} \cdot \sin(a)_{нк}, dirR = \Delta_{цк} / |\Delta_{цк}|.$

Определяются разности синусов и косинусов дирекционных углов радиусов:

$d(\sin(a)) = \sin(a)_{кк} - \sin(a)_{нк}, d(\cos(a)) = \cos(a)_{кк} - \cos(a)_{нк}.$

Определяются длина и база разностей синусов и косинусов:

$l' = (d(\sin(a))^2 + d(\cos(a))^2)^{1/2},$

$b' = (1 - (l'/2)^2)^{1/2}.$

Определяется угол между радиусами в радианах:

$\gamma = 2 \cdot \arctg(l'/2/b').$

Определяется длина круговой кривой:

$L_k = \gamma \cdot R.$

Определяется разность длины и пикетажной длины и масштабный коэффициент:

$dL = L_k - |dPK|, kM = |dPK| / L_k.$

2) Определение пикетажа и смещения по координатам.

Задаются (либо определяются в натуре) координаты знака:

$Y_{пз}, X_{пз}.$

Определяется радиус до знака:

$R_{пз} = ((Y_{пз} - Y_{цк})^2 + (X_{пз} - X_{цк})^2)^{1/2}.$

Определяются синус и косинус дирекционного угла радиуса знака:

$\sin(a)_{пз} = dY_{пз} / R_{пз}, \cos(a)_{пз} = dX_{пз} / R_{пз}.$

Определяются разности синусов и косинусов дирекционных углов радиусов:

$d(\sin(a))_{пз} = \sin(a)_{пз} - \sin(a)_{нк}, d(\cos(a))_{пз} = \cos(a)_{пз} - \cos(a)_{нк}.$

Определяются длина и база разностей синусов и косинусов:

$l'_{пз} = (d(\sin(a))_{пз}^2 + d(\cos(a))_{пз}^2)^{1/2},$

$b'_{пз} = (1 - (l'_{пз}/2)^2)^{1/2}.$

Определяется угол между радиусами в радианах:

$\gamma_{пз} = 2 \cdot \arctg(l'_{пз}/2/b'_{пз}).$

Определяется направление вращения:

$$\Delta R_{пз} = (Y_{пз} - Y_{цк}) * \cos(a)_{нк} - (X_{пз} - X_{цк}) * \sin(a)_{нк},$$
$$\text{dir}(\gamma)_{пз} = \Delta R_{пз} / |\Delta R_{пз}|$$

Определяется изменение пикетажа, пикетаж и смещение:

$$dPK_{пз} = (\gamma_{пз} * R * \text{dir}PK * \text{dir}R) * kM * \text{dir}(\gamma),$$
$$PK_{пз} = PK_{нк} + dPK_{пз},$$
$$\Delta a_{пз} = (R - R_{пз}) * \text{dir}PK * \text{dir}R.$$

3) Определение координат по пикетажу и смещению.

Задаются пикетаж и смещение проектной точки:

$$PK_{пт}, \Delta a_{пт}.$$

Определяется разность пикетажа и проложение:

$$dPK_{пт} = PK_{пт} - PK_{нк}, \quad L_{пт} = dPK_{пт} / kM$$

Определяется угол поворота в радианах:

$$\gamma_{птапт} = L_{пт} / R * \text{dir}PK * \text{dir}R.$$

Определяются синус и косинус угла поворота:

$$\sin(\gamma)_{пт} = \sin(\gamma_{птапт}), \quad \cos(\gamma)_{пт} = \cos(\gamma_{птапт}).$$

Определяются синус и косинус дирекционного угла радиуса на проектную точку:

$$\sin(a)_{пт} = \sin(a)_{нк} * \cos(\gamma)_{пт} + \cos(a)_{нк} * \sin(\gamma)_{пт},$$
$$\cos(a)_{пт} = \cos(a)_{нк} * \cos(\gamma)_{пт} - \sin(a)_{нк} * \sin(\gamma)_{пт},$$

Определяем координаты пикетажной точки на осевом радиусе:

$$Y_{0пт} = Y_{цк} + R * \sin(a)_{пт}, \quad X_{0пт} = X_{цк} + R * \cos(a)_{пт}.$$

Определяем координаты проектной точки:

$$Y_{пт} = Y_{0пт} - \text{dir}PK * \text{dir}R * \Delta a_{пт} * \sin(a)_{пт},$$
$$X_{пт} = X_{0пт} - \text{dir}PK * \text{dir}R * \Delta a_{пт} * \cos(a)_{пт}.$$

4) Определение элементов круговой кривой, заданной средней точкой.

Заданы три точки:

$$PK_{нк}, Y_{нк}, X_{нк}, PK_{кк}, Y_{кк}, X_{кк}, Y_{ск}, X_{ск}.$$

Определяем центр круговой кривой:

$$[Y^2X^2]_{нк} = Y_{нк}^2 + X_{нк}^2,$$
$$[Y^2X^2]_{ск} = Y_{ск}^2 + X_{ск}^2,$$
$$[Y^2X^2]_{кк} = Y_{кк}^2 + X_{кк}^2,$$
$$dY_{нк} = Y_{кк} - Y_{ск}, \quad dX_{нк} = X_{кк} - X_{ск},$$
$$dY_{ск} = Y_{кк} - Y_{нк}, \quad dX_{ск} = X_{кк} - X_{нк},$$
$$dY_{кк} = Y_{ск} - Y_{нк}, \quad dX_{кк} = X_{ск} - X_{нк},$$
$$Y_{цк} = -1/2 * (dX_{нк} * [X^2Y^2]_{ск} - dX_{ск} * [X^2Y^2]_{кк} + dX_{кк} * [X^2Y^2]_{нк}) / (dY_{нк} * X_{нк} - dY_{ск} * X_{ск} + dY_{кк} * X_{кк})$$
$$X_{цк} = 1/2 * (dY_{нк} * [X^2Y^2]_{нк} - dY_{ск} * [X^2Y^2]_{ск} + dY_{кк} * [X^2Y^2]_{кк}) / (dY_{нк} * X_{нк} - dY_{ск} * X_{ск} + dY_{кк} * X_{кк})$$

Определяем радиус круговой кривой:

$$R_{нк} = ((Y_{нк} - Y_{цк})^2 + (X_{нк} - X_{цк})^2)^{1/2},$$
$$R_{ск} = ((Y_{ск} - Y_{цк})^2 + (X_{ск} - X_{цк})^2)^{1/2},$$
$$R_{кк} = ((Y_{кк} - Y_{цк})^2 + (X_{кк} - X_{цк})^2)^{1/2},$$
$$R = (R_{нк} + R_{ск} + R_{кк}) / 3$$

Определяем разности координат точек кривой и центра кривой:

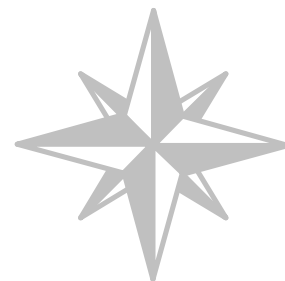
$$dY_{нк} = Y_{нк} - Y_{цк}, \quad dX_{нк} = X_{нк} - X_{цк},$$
$$dY_{ск} = Y_{ск} - Y_{цк}, \quad dX_{ск} = X_{ск} - X_{цк},$$
$$dY_{кк} = Y_{кк} - Y_{цк}, \quad dX_{кк} = X_{кк} - X_{цк},$$

Определяются синусы и косинусы дирекционных углов радиусов круговой кривой:

$$\sin(a)_{HK} = dY_{HK}/R_{HK}, \quad \cos(a)_{HK} = dX_{HK}/R_{HK},$$

$$\sin(a)_{CK} = dY_{CK}/R_{HK}, \quad \cos(a)_{CK} = dX_{CK}/R_{HK},$$

$$\sin(a)_{KK} = dY_{KK}/R_{KK}, \quad \cos(a)_{KK} = dX_{KK}/R_{KK}.$$



Определяются разности синусов и косинусов дирекционных углов радиусов:

$$d(\sin(a))_{HK} = \sin(a)_{CK} - \sin(a)_{HK}, \quad d(\cos(a))_{HK} = \cos(a)_{CK} - \cos(a)_{HK},$$

$$d(\sin(a))_{KK} = \sin(a)_{KK} - \sin(a)_{CK}, \quad d(\cos(a))_{KK} = \cos(a)_{KK} - \cos(a)_{CK}.$$

Определяются длины и базы разностей синусов и косинусов:

$$l'_{HK} = (d(\sin(a))_{HK}^2 + d(\cos(a))_{HK}^2)^{1/2}, \quad b'_{HK} = (1 - (l'_{HK}/2)^2)^{1/2},$$

$$l'_{KK} = (d(\sin(a))_{KK}^2 + d(\cos(a))_{KK}^2)^{1/2}, \quad b'_{KK} = (1 - (l'_{KK}/2)^2)^{1/2}.$$

Определяется углы между радиусами и угол поворота в радианах:

$$\gamma_{HK} = 2 \cdot \arctg(l'_{HK}/b'_{HK}),$$

$$\gamma_{KK} = 2 \cdot \arctg(l'_{KK}/b'_{KK}),$$

$$\beta = \gamma_{HK} + \gamma_{KK}$$

Определяется длина круговой кривой:

$$L_K = \beta \cdot R.$$

Определяется тангенс круговой кривой:

$$T_K = R \cdot \tg(\beta/2).$$

Определяется положение центра относительно начала и конца кривой:

$$\Delta_{CK} = dY_{KK} \cdot \cos(a)_{HK} - dX_{KK} \cdot \sin(a)_{HK}, \quad \text{dir}R = \Delta_{CK} / |\Delta_{CK}|.$$

Определяются синусы и косинусы дирекционных углов, повернутых на 90 градусов:

$$\sin(a+90)_{HK} = \cos(a)_{HK} \cdot \text{dir}R, \quad \cos(a+90)_{HK} = -\sin(a)_{HK} \cdot \text{dir}R,$$

$$\sin(a+90)_{KK} = -\cos(a)_{KK} \cdot \text{dir}R, \quad \cos(a+90)_{KK} = \sin(a)_{KK} \cdot \text{dir}R,$$

Определяются координаты вершины угла поворота:

$$Y_{ву} = Y_{HK} + T_K \cdot \sin(a+90)_{HK}, \quad X_{ву} = X_{HK} + T_K \cdot \cos(a+90)_{HK},$$

$$Y_{ву} = Y_{KK} + T_K \cdot \sin(a+90)_{KK}, \quad X_{ву} = X_{KK} + T_K \cdot \cos(a+90)_{KK}.$$

5) Определение элементов круговой кривой, заданной двумя прямыми и радиусом.

Заданы точки двух прямых и радиус:

$$Y_{п1}, X_{п1}, Y_{кп1}, X_{кп1}, Y_{п2}, X_{п2}, Y_{кп2}, X_{кп2}, R$$

Определяются координатные разности и длины обеих прямых:

$$dY_{п1} = Y_{кп1} - Y_{п1}, \quad dX_{п1} = X_{кп1} - X_{п1}, \quad L_{п1} = (dY_{п1}^2 + dX_{п1}^2)^{1/2},$$

$$dY_{п2} = Y_{кп2} - Y_{п2}, \quad dX_{п2} = X_{кп2} - X_{п2}, \quad L_{п2} = (dY_{п2}^2 + dX_{п2}^2)^{1/2}.$$

Определяется вершина поворота (пересечение прямых):

$$B = dY_{п2} \cdot dX_{п1} - dY_{п1} \cdot dX_{п2}$$

$$dY1 = Y_{кп2} - Y_{кп1}, \quad dX1 = X_{кп2} - X_{кп1},$$

$$dY2 = Y_{п2} - Y_{кп1}, \quad dX2 = X_{п2} - X_{кп1},$$

$$dY3 = Y_{кп2} - Y_{п1}, \quad dX3 = X_{кп2} - X_{п1},$$

$$dY3 = Y_{п1} - Y_{п2}, \quad dX4 = X_{п1} - X_{п2},$$

$$Z1 = Y_{п1} \cdot (Y_{п2} \cdot dX1 + Y_{кп2} \cdot dX2) + Y_{кп1} \cdot (Y_{п2} \cdot dX3 + Y_{кп2} \cdot dX4),$$

$$Z2 = X_{п1} \cdot (X_{п2} \cdot dY1 + X_{кп2} \cdot dY2) + X_{кп1} \cdot (X_{п2} \cdot dY3 + X_{кп2} \cdot dY4),$$

$$Y_{ву} = Z1/B, \quad X_{ву} = Z2/B.$$

Определяются синусные и косинусные компоненты дирекционных углов прямых:

$$\sin(a1) = dY_{п1}/L_{п1}, \quad \cos(a1) = dX_{п1}/L_{п1},$$

$$\sin(a2) = dY_{п2}/L_{п2}, \quad \cos(a2) = dX_{п2}/L_{п2}.$$

Определяются разности синусных и косинусных компонент двух прямых:

$$d(\sin(a)) = \sin(a2) - \sin(a1), \quad d(\cos(a)) = \cos(a2) - \cos(a1)$$

Определяется угол поворота в радианах:

$$l' = (d(\sin(a))^2 + d(\cos(a))^2)^{1/2},$$

$$b' = (1 - (l'/2)^2)^{1/2},$$